Universidad Simón Bolívar
Matemáticas I (MA-1111)
Primer Examen Parcial

Elaborado por: Miguel Ángel Labrador
Ingeniería Electrónica
Carnet: 12-10423
Correo: miguelangel2801@gmail.com
Twitter: @miguelangel2801

PREPARADURÍA Nº 1

Matemáticas I (MA-1111)

Resolución de inecuaciones con valor absoluto.

Ejemplo 1 *Diga cuál es el conjunto solución de*

$$| x - 2 | < 1 + | x |$$

Solución:

Para solucionar la inecuación utilizaremos la separación por casos. Recordemos la definición del valor absoluto:

Definición de valor absoluto

$$| x | = \begin{cases} x & , \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & , \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Aplicamos la definición a cada una de la expresiones con valor absoluto:

Para $| x - 2 |$:

$$| x - 2 | = \begin{cases} x - 2 & , \text{si } x - 2 \geqslant 0 \\ -(x-2) & , \text{si } x - 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 2 & , \text{si } x \geqslant 2 \\ -(x-2) & , \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Note cómo se llega a la última expresión, en adelante plantearemos la definición directamente.

Para $| x |$:

$$| x | = \begin{cases} x & , \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & , \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Observe que $x = 2$ y $x = 0$ son puntos de interés y separan la recta real en tres intervalos (los casos que estudiaremos): $(-\infty, 0)$,$[0, 2)$,$[2, \infty)$, donde cada una de la expresiones con valor absoluto tomarán valores según el intervalo (caso) donde estemos trabajando. A continuación se ilustra esto en la siguiente tabla

	$(-\infty, 0)$	$[0, 2)$	$[2, \infty)$
$\mid x-2 \mid$	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$x-2$
$\mid x \mid$	$-x$	x	x
	Caso 1	Caso 2	Caso 3

Observe cómo se han escrito los intervalos, se ha incluido el cero en el intervalo $[0, 2)$ ya que la definición, tal como se escribió, nos indica que el cero está incluido en el intervalo $[0, \infty)$ $(x \geqslant 0)$ y no en $(-\infty, 0)$ $(x < 0)$. Igual sucede para $x = 2$.

Analizamos cada uno de los casos ilustrados en la tabla.

Caso 1. $(-\infty, 0)$

Según la tabla que hemos construido, la inecuación original para este intervalo se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \mid x-2 \mid < 1+ \mid x \mid \\ \Longleftrightarrow & -(x-2) < 1-x \\ \Longleftrightarrow & -x+2 < 1-x \\ \Longleftrightarrow & \; 2 < 1 \end{aligned}$$

Hemos llegado a un hecho falso, pues dos no es menor que uno, esto quiere decir que no existe ningún valor de x en este intervalo que satisface la inecuación, por lo tanto:

$$x \in \varnothing \cap (-\infty, 0) = \varnothing \qquad \text{(La intersección de algún conjunto con vacío es vacío)}$$

La solución del caso 1 es:

$$\boxed{S_1 = \varnothing}$$

Caso 2. $[0, 2)$

En este intervalo tenemos que la inecuación nos queda:

$$\begin{aligned} -(x-2) &< 1+x \\ \iff -x+2 &< 1+x \\ \iff -2x &< -1 \\ \iff 2x &> 1 \\ \iff x &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Cambia el signo de la desigualdad ya que hemos multiplicado por (-1) ambos lados.

Hemos obtenido el conjunto solución $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, para la inecuación, en el intervalo $[0, 2)$. Luego debemos interceptar estos dos conjuntos para que sea solución de la inecuación original, esto se hace ya que los valores que satisfacen la inecuación deben estar incluidos en ambos intervalos.

De modo que el conjunto solución del caso 2 es:

$$\boxed{S_2 = \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \cap [0, 2) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)}$$

Caso 3. $[2, +\infty)$

$$\begin{aligned} x-2 &< 1+x \\ \iff -2 &< 1 \end{aligned}$$

A contrario de lo que pasó en el caso 1, acá hemos obtenido que $-2 < 1$, lo cual es cierto, esto significa que esta inecuación se cumple siempre para cualquier valor de x o sea $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Luego el conjunto solución del caso 3 está dado por :

$$\boxed{S_3 = [2, +\infty) \cap \mathbb{R} = [2, +\infty)}$$

Finalmente la solución de la inecuación está constituida por la unión de todas la soluciones que hemos encontrado:

$$\boxed{S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \varnothing \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup [2, +\infty) = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)}$$

Note que la unión con un conjunto vacío no genera ningún cambio. Por otro lado fíjese que tenemos la unión de dos conjuntos que se pueden escribir como un solo intervalo: $\left(\frac{1}{2}, 2\right] \cup (2, +\infty) = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Ejemplo 2. *Hallar el conjunto solución de*

$$\frac{| x-3 | -2}{| 4-x | -1} < 1$$

Solución:

Cuando tenemos expresiones racionales (fraccionarias) debemos chequear si hay valores donde el denominador se anula (no está definida la función) con el fin de **no incluir** dichos valores en el conjunto solución final.

Debemos preguntarnos qué valores hacen que $| 4-x | -1$ sea cero, lo que es equivalente a resolver la **ecuación**:

$$| 4-x | -1 = 0 \Longrightarrow | 4-x |= 1 \Longrightarrow (4-x)^2 = 1^2$$
$$\Longrightarrow 16-8x+x^2 = 1 \Longrightarrow x^2-8x+15 = 0 \Longrightarrow (x-5)(x-3) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 3 \end{cases}$$

De manera que no podemos incluir estos dos valores en la solución final puesto que hacen que la desigualdad no se cumpla.

Analizamos por casos como en el ejemplo anterior.

Por definición de valor absoluto:

$$| x-3 |= \begin{cases} x-3 & , \text{ si } x \geqslant 3 \\ -(x-3) & , \text{ si } x < 3 \end{cases}$$

Por propiedades del valor absoluto sabemos que: $| ab |=| a || b |$, en este caso podemos escribir:

$$| 4-x |=| -(x-4) |=| -1 || x-4 |=| x-4 |$$

Entonces:

$$| 4-x |=| x-4 |= \begin{cases} x-4 & , \text{ si } x \geqslant 4 \\ -(x-4) & , \text{ si } x < 4 \end{cases}$$

Se puede construir ahora la tabla:

	$(-\infty,3)$	$(3,4)$	$[4,+\infty)-\{5\}$
$\mid x-3\mid$	$-(x-3)$	$x-3$	$x-3$
$\mid x-4\mid$	$-(x-4)$	$-(x-4)$	$x-4$
	Caso 1	Caso 2	Caso 3

Fíjese que no se ha incluido el 3 para que este valor no aparezca en nuestra solución final, además note cómo hemos quitado el 5 de el intervalo $(4,+\infty)$ por la misma razón.

Caso 1. $(-\infty,3)$

En este intervalo la desigualdad queda:

$$\begin{aligned} &\frac{-(x-3)-2}{-(x-4)-1}<1 \\ \iff &\frac{-x+1}{-x+3}<1 \\ \iff &\frac{-x+1}{-x+3}-1<0 && \text{Comparamos siempre con cero.} \\ \iff &\frac{-x+1+x-3}{-x+3}<0 \\ \iff &\frac{-2}{-x+3}<0 \\ \iff &\frac{2}{x-3}<0 \end{aligned}$$

Fíjese que no se cambió el signo de la desigualdad ya que hemos multiplicado dos veces por (-1).

Tenemos una desigualdad que involucra una expresión racional, por lo que debemos estudiar el signo de dicha expresión para saber en qué conjuntos es negativa (para esto es que se compara con cero).

No estudiaremos los signos de la expresión por el método del cementerio ya que no es necesario toda esa maquinaria. Note que el numerador es un número positivo por lo que el signo de la expresión lo definirá el denominador.

Si $x>3$ entonces $x-3>0$ y si $x<3$ entonces $x-3<0$. Por lo tanto $\dfrac{2}{x-3}<0$ si y solo si $x<3$

De manera que:

$$\boxed{S_1=(-\infty,3)\cap(-\infty,3)=(-\infty,3)}$$

Caso 2. $(3, 4)$

$$\frac{x-3-2}{-(x-4)-1} < 1 \iff \frac{x-5}{-x+3} < 1 \iff \frac{x-5}{-x+3} - 1 < 0$$
$$\iff \frac{x-5-(-x+3)}{-x+3} < 0 \iff \frac{2x-8}{-(x-3)} < 0 \iff \frac{x-4}{x-3} > 0$$

Acá sí analizaremos el signo de la expresión con el método del cementerio. Nos interesan los intervalos donde el miembro izquierdo de la desigualdad es positivo. Nuestros puntos de interés son 4 y 3 por ser raíces y puntos donde no se define la expresión respectivamente.

	$(-\infty, 3)$	$(3, 4]$	$[4, +\infty)$
$x-4$	-	-	$+$
$x-3$	-	$+$	$+$
$\frac{x-4}{x-3}$	$+$	-	$+$

Observe que, nuevamente, el tres no puede ser añadido a las soluciones dado que en $x = 3$ la función del miembro izquierdo de la desigualdad no está definida.

Del estudio de signos hemos obtenido que $\dfrac{x-4}{x-3}$ es positiva en $(-\infty, 3) \cup [4, +\infty)$.

Luego $\boxed{S_2 = \{(-\infty, 3) \cup [4, +\infty)\} \cap (3, 4) = \varnothing}$

Caso 3. $[4, \infty) - \{5\}$

En este intervalo obtenemos:

$$\frac{x-3-2}{x-4-1} < 1 \iff \frac{x-5}{x-5} < 1 \iff 1 < 1$$

Hemos llegado a un hecho falso por lo tanto no existen valores en este intervalo que satisfacen la desigualdad.

Luego: $\boxed{S_3 = \varnothing \cap [4, +\infty) - \{5\} = \varnothing}$

Finalmente:

$$\boxed{S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty, 3) \cup \varnothing \cup \varnothing = (-\infty, 3)}$$

Ejemplo 3. *Hallar el conjunto solución que satisface*

$$\frac{\mid x^2 + x + 5 \mid}{\mid 8x + 1 \mid - \mid 3x \mid} > 0$$

Solución:

Cuando tenemos el valor absoluto de polinomios de grado mayor que 1 factorizamos para luego aplicar la definición de valor absoluto a cada factor. Apliquemos resolvente:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

Es evidente que el **discriminante será negativo** por lo tanto el polinomio $x^2 + x + 5$ no tiene raíces reales, en otras palabras, no se puede factorizar en los números reales. Este resultado nos indica que el polinomio cuadrático jamás cambia de signo, es decir, es siempre positivo o negativo, en este caso como el coeficiente del término de mayor grado es positivo, el polinomio será positivo para todo $\mathbb{R}$, por lo tanto:

$$\mid x^2 + x + 5 \mid = x^2 + x + 5 \qquad \text{(Se puede quitar el valor absoluto)}$$

Entonces, podemos escribir

$$\frac{\mid x^2 + x + 5 \mid}{\mid 8x + 1 \mid - \mid 3x \mid} = \frac{x^2 + x + 5}{\mid 8x + 1 \mid -3 \mid x \mid} > 0$$

Ahora buscamos los puntos donde el denominador se anula, lo que es equivalente a resolver:

$$\mid 8x + 1 \mid -3 \mid x \mid = 0 \Longrightarrow \mid 8x + 1 \mid = 3 \mid x \mid \Longrightarrow (8x + 1)^2 = 9x^2 \Longrightarrow 55x^2 + 16x + 1 = 0$$

De aquí tenemos que

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{11} \\ x = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Por lo tanto, estos puntos no pueden pertenecer a la solución final.

Por definición de valor absoluto:

$$\mid 8x + 1 \mid = \begin{cases} 8x + 1 & \text{, si } x \geqslant -\frac{1}{8} \\ -(8x + 1) & \text{, si } x < -\frac{1}{8} \end{cases} \qquad \mid x \mid = \begin{cases} x & \text{, si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{, si } x < 0 \end{cases}$$

Aplicamos separación por casos teniendo cuidado de no incluir los puntos donde no está definida la función.

	$(-\infty,-\frac{1}{8})-\{-\frac{1}{5}\}$	$[-\frac{1}{8},0)-\{-\frac{1}{11}\}$	$[0,+\infty)$
$\mid 8x+1 \mid$	$-(8x+1)$	$8x+1$	$8x+1$
$\mid x \mid$	$-x$	$-x$	x
	Caso 1	Caso 2	Caso 3

No olvide que el símbolo (-) que precede a las llaves significa que no incluimos lo que está dentro de las llaves no lo confunda con una sustracción.

Analicemos los casos.

Caso 1. $(-\infty,-\frac{1}{8})-\{-\frac{1}{5}\}$

En este intervalo la desigualdad nos queda

$$\frac{x^2+x+5}{-(8x+1)-3(-x)}>0 \Longleftrightarrow \frac{x^2+x+5}{-5x-1}>0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x^2+x+5}{5x+1}<0 \Longleftrightarrow \frac{1}{5x+1}<0$$

Podemos prescindir del factor x^2+x+5 pasándolo a dividir al otro lado ya que, como hemos mostrado, es positivo y no tiene raíces por lo tanto nunca es cero.

Para analizar el signo de esta expresión debemos preguntarnos como se comporta el denominador, pues el numerador es siempre positivo.

Note que $\dfrac{1}{5x+1}<0$ si y solo si $x<-\frac{1}{5}$ por lo tanto:

$$\boxed{S_1=(-\infty,-\tfrac{1}{5})\cap(-\infty,-\tfrac{1}{8})-\{-\tfrac{1}{5}\}=(-\infty,-\tfrac{1}{5})}$$

Caso 2. $[-\frac{1}{8},0)-\{-\frac{1}{11}\}$

$$\frac{x^2+x+5}{8x+1-3(-x)}>0 \Longleftrightarrow \frac{1}{11x+1}>0$$

En este caso $\dfrac{1}{11x+1}>0$ si y solo si $x>-\frac{1}{11}$ por lo tanto:

$$\boxed{S_2=(-\tfrac{1}{11},+\infty,)\cap[-\tfrac{1}{8},0)-\{-\tfrac{1}{11}\}=(-\tfrac{1}{11},0)}$$

Caso 3. $[0, +\infty)$

$$\frac{x^2+x+5}{8x+1-3x} > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{5x+1} > 0$$

Observe que $\dfrac{1}{5x+1} > 0$ si y solo si $x > -\frac{1}{5}$ por lo tanto:

$$\boxed{S_3 = (-\tfrac{1}{5}, +\infty,) \cap [0, +\infty) = [0, +\infty)}$$

Finalmente la solución general del problema está dada por la unión de las soluciones de todos los casos:

$$\boxed{S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty, -\tfrac{1}{5}) \cup (-\tfrac{1}{11}, 0) \cup [0, +\infty) = (-\infty, -\tfrac{1}{5}) \cup (-\tfrac{1}{11}, +\infty)}$$

Note que que podemos escribir la unión de los dos últimos intervalos como uno solo ya que el cero está incluido en uno de ellos.

Ejemplo 4. *Halle todos los valores de x que satisfacen la siguiente desigualdad*

$$\left|2 - \frac{1}{5x-1}\right| \geqslant 1$$

.

Solución:

Note que no hace falta usar el método de separación de casos a partir de la definición de valor absoluto como se hizo para los ejemplos anteriores, ya que se pueden usar de inmediato las **propiedades de las desigualdades con valor absoluto**, en este caso, que:

Si $a \in \mathbb{R}$

$$|x| \geqslant a \Longleftrightarrow \quad x \leqslant -a \quad \text{ó} \quad x \geqslant a$$

Usamos la propiedad y obtenemos:

$$\left|2 - \frac{1}{5x-1}\right| \geqslant 1 \Longleftrightarrow 2 - \frac{1}{5x-1} \leqslant -1 \text{ ó } 2 - \frac{1}{5x-1} \geqslant 1$$

Resolvemos las desigualdades en paralelo si se quiere.

$$\iff 2-\frac{1}{5x-1}\leqslant -1 \quad \text{ó} \quad 2-\frac{1}{5x-1}\geqslant 1$$

$$\iff \frac{10x-2-1}{5x-1}\leqslant -1 \quad \text{ó} \quad \frac{10x-2-1}{5x-1}\geqslant 1$$

$$\iff \frac{10x-3}{5x-1}\leqslant -1 \quad \text{ó} \quad \frac{10x-3}{5x-1}\geqslant 1$$

$$\iff \frac{10x-3}{5x-1}+1\leqslant 0 \quad \text{ó} \quad \frac{10x-3}{5x-1}-1\geqslant 0$$

$$\iff \frac{15x-4}{5x-1}\leqslant 0 \quad \text{ó} \quad \frac{5x-2}{5x-1}\geqslant 0$$

Debemos estudiar los signos de cada desigualdad

Para $\dfrac{15x-4}{5x-1}\leqslant 0$ los puntos de interés son $x=\frac{4}{15}$ $x=\frac{1}{5}$

	$(-\infty,\frac{1}{5})$	$(\frac{1}{5},\frac{4}{15}]$	$[\frac{4}{15},+\infty)$
$15x-4$	-	-	+
$5x-1$	-	+	+
$\frac{15x-4}{5x-1}$	+	-	+

No incluimos en los intervalos a $x=\frac{1}{5}$ ya que allí no está definida la función (división entre 0) y si incluimos a $x=\frac{4}{15}$ porque la desigualdad no es estricta.

De aquí obtenemos el conjunto que cumple con la primera condición:

$$\boxed{S_a=(\tfrac{1}{5},\tfrac{4}{15}]}$$

Para $\dfrac{5x-2}{5x-1}\geqslant 0$ los puntos de interés son $x=\frac{2}{5}$ $x=\frac{1}{5}$

	$(-\infty,\frac{1}{5})$	$(\frac{1}{5},\frac{2}{5}]$	$[\frac{2}{5},+\infty)$
$5x-2$	-	-	+
$5x-1$	-	+	+
$\frac{5x-2}{5x-1}$	+	-	+

De aquí obtenemos el conjunto que cumple con la segunda condición:

$$\boxed{S_b=(-\infty,\tfrac{1}{5})\cup[\tfrac{2}{5},+\infty)}$$

Finalmente **la respuesta será la unión de los conjuntos que obtuvimos**, o sea:

$$S_g = S_a \cup S_b$$

$$\boxed{S_g = \{(-\infty, \tfrac{1}{5}) \cup [\tfrac{2}{5}, +\infty)\} \cup (\tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{15}]}$$

Ejemplo 5. Diga para qué valores de x se cumple que:

$$\frac{\sqrt{x+1}}{|x-\pi|-\pi} \geqslant 0$$

Solución:

Se pide el conjunto para el cual la expresión es positiva o cero.

En primer lugar observe que el numerador está constituido por una raíz cuadrada, entonces será siempre positivo, pues una raíz cuadrada nunca generará un numero negativo, en otras palabras:

$$\sqrt{x+1} \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x+1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant -1$$

Esta condición indica que para que la raíz esté *definida* la cantidad subradical no puede ser negativa, por lo tanto, es una condición que debe tomarse en cuenta para la solución final.

Como el numerador siempre será positivo o cero lo que generará cambios en el signo de la expresión es el denominador, en otras palabras, si el denominador es positivo entonces la expresión será positiva, análogamente si es negativo.

Como queremos saber cuando la expresión es positiva o cero entonces averiguamos cuando el denominador es positivo:

$$|x-\pi| - \pi > 0$$

Note que utilizamos la desigualdad estricta $>$ y no $\geqslant$ ya que el denominador no puede ser cero.

Resolvemos esta desigualdad para ver en qué conjunto se satisface:

$$|x-\pi| - \pi > 0 \Longleftrightarrow |x-\pi| > \pi$$

Aplicamos propiedades del valor absoluto:

$$\begin{aligned}|x-\pi| > \pi &\Longleftrightarrow x-\pi < -\pi \quad \text{ó} \quad x-\pi > \pi \\ &\Longleftrightarrow x < 0 \quad \text{ó} \quad x > 2\pi\end{aligned}$$

De aquí tenemos que el denominador será positivo si y solo si $x \in (-\infty, 0) \cup (2\pi, +\infty)$.

Como el numerador será positivo o cero si y solo si $x \in [-1, +\infty)$ entonces debemos intersectar estas dos condiciones para saber en que conjunto estas coinciden y formular una respuesta para el problema.

$$\begin{aligned}&\{(-\infty, 0) \cup (2\pi, +\infty)\} \cap [1, +\infty) \\ &= (-\infty, 0) \cap [-1, +\infty) \cup (2\pi, +\infty) \cap [1, +\infty) && \text{(Distributividad de conjuntos.)} \\ &= [-1, 0) \cup (2\pi, +\infty)\end{aligned}$$

Finalmente la desigualdad se cumple para toda $x \in [-1, 0) \cup (2\pi, +\infty)$.

Ejemplo 6. ¿ En cuál conjunto se satisface la siguiente desigualdad?

$$\frac{|2x^2-3x+3| - |x^2+1|}{|x^3+x^2+3x+3|} \geqslant 0$$

Solución:

Para intentar resolver este tipo de inecuaciones lo mas común es intentar factorizar polinomios para encontrar los *puntos de interés que por lo general son las raíces del numerador y del denominador*. Sin embargo, estudiemos un poco las expresiones del numerador.

Inicialmente el polinomio $x^2 + 1$ no se puede factorizar en los números reales dado que no tiene raíces reales. Podemos comprobarlo calculando su discriminante[1]:

$$b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(1) = -4 \qquad \text{(Discriminante de } x^2+1.\text{)}$$

Como el discriminante es menor que cero entonces podemos decir que este polinomio no tiene raíces reales, es decir, nunca toma el valor cero. Como este polinomio no puede tomar el valor cero entonces será siempre positivo o negativo en todo $\mathbb{R}$.

Por supuesto, es más que evidente que $x^2 + 1$ es positivo pues se trata de un número elevado al cuadrado más un numero positivo. Esto quiere decir que podemos escribir[2]

[1] El discriminante de un polinomio cuadrático de la forma $ax^2 + bx + c$ está dado por $b^2 - 4ac$.

[2] Otra manera de verlo es que el polinomio $x^2 + 1$ representa una parabola cóncava hacia arriba con vértice en el punto $(0, 1)$.

$$\left|x^2+1\right| = x^2+1$$

ya que el valor absoluto de un numero positivo es dicho número, tal como la definición del valor absoluto lo indica.

Así mismo para el polinomio $2x^2-3x+3$ su discriminante está dado por

$$b^2-4ac = (-3)^2-4(2)(3) = 9-24 = -15$$

por lo tanto:

$$\left|2x^2-3x+3\right| = 2x^2-3x+3$$

Entonces podemos decir que:

$$\frac{|2x^2-3x+3|-|x^2+1|}{|x^3+x^2+3x+3|} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{(2x^2-3x+3)-(x^2+1)}{|x^3+x^2+3x+3|} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{|x^3+x^2+3x+3|} \geqslant 0$$

Ahora ya podemos proceder a factorizar expresiones para conocer puntos de interés y así mismo aplicar la definición de valor absoluto.

La expresión del denominador se factoriza de la siguiente manera:

$$\left|x^3+x^2+3x+3\right| = \left|x^2(x+1)+3(x+1)\right| = \left|(x+1)(x^2+3)\right| = |x+1|\left|x^2+3\right| = |x+1|\,(x^2+3)$$

La desigualdad se escribe ahora como:

$$\frac{x^2-3x+2}{|x^3+x^2+3x+3|} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{|x+1|\,(x^2+3)} \geqslant 0$$

El término x^2+3 es siempre positivo y nunca vale cero, por lo tanto no aporta información para conocer el signo de la expresión, por lo tanto podemos multiplicar ambos lados de la inecuación por él o *pasarlo multiplicando* al otro lado.

$$\frac{(x-1)(x-2)}{|x+1|\,(x^2+3)} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{|x+1|} \geqslant 0$$

En este punto podemos aplicar la definición de valor absoluto y proceder con normalidad, sin embargo observe que el denominador, al estar constituido por el término $|x-1|$, es siempre positivo excepto en $x=-1$ por lo tanto el signo de la expresión estará determinado por el numerador.

Como los puntos de interés son las raíces del numerador $1, 2$ y tomando en cuenta que no se puede incluir al -1 en los intervalos de interés, hacemos el siguiente estudio de signos:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1]$	$[1, 2]$	$[2, +\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\|x+1\|$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$+$	$+$	$-$	$+$

De acá tenemos que la expresión es positiva o cero en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1] \cup [2, +\infty)$.

Ejemplo 7. Resolver la siguiente desigualdad, dar la solución en términos de intervalos y representarla en la recta real.

$$\left|1 - \sqrt{|4 - x^2|}\right| < 1$$

Solución:

Para comenzar, es evidente la presencia de una inecuación que podemos trabajar con las propiedades de las desigualdades con valor absoluto.

$$\begin{aligned}
\left|1 - \sqrt{|4 - x^2|}\right| < 1 &\iff -1 < 1 - \sqrt{|4 - x^2|} < 1 \\
&\iff -2 < -\sqrt{|4 - x^2|} < 0 \\
&\iff 2 > \sqrt{|4 - x^2|} > 0 \\
&\iff 0 < \sqrt{|4 - x^2|} < 2
\end{aligned}$$

Observe que hemos llegado a una desigualdad combinada, esto es, dos desigualdades en una:

$$0 < \sqrt{|4 - x^2|} < 2 \iff 0 < \sqrt{|4 - x^2|} \quad \text{y} \quad \sqrt{|4 - x^2|} < 2$$

Resolvemos ambas desigualdades por separado y al final debemos de intersectar ambos resultados.

Para la primera desigualdad, recuerde que $\sqrt{\boxtimes} \geqslant 0 \iff \boxtimes \geqslant 0$, es decir que nuestra raíz es siempre positiva o cero siempre que la cantidad subradical sea positiva o cero. Al tratarse de una expresión con valor absoluto esta será siempre positiva excepto en aquellos puntos donde se vuelve cero.

$$\left|4 - x^2\right| = 0 \implies 4 - x^2 = 0 \implies (2 - x)(2 + x) = 0$$

De aquí es evidente que la cantidad subradical se hace cero en $x = 2$ y $x = -2$, entonces podemos decir que la primera desigualdad se cumple para $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Decimos entonces que

$$\text{Sol}_1 = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Para la segunda desigualdad, $\sqrt{|4 - x^2|} < 2$, observe que podemos utilizar la siguiente propiedad:

$$\text{Si } a > 0 \text{ y } b > 0 \text{ entonces } a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2.$$

Note que la podemos usar ya que $\sqrt{|4 - x^2|} \geqslant 0$ y $2 > 0$. Entonces:

$$\sqrt{|4 - x^2|} < 2 \Longleftrightarrow \left|4 - x^2\right| < 4 \Longleftrightarrow -4 < 4 - x^2 < 4 \Longleftrightarrow -8 < -x^2 < 0 \Longleftrightarrow 0 < x^2 < 8$$

Nuevamente tenemos dos desigualdades. La intersección de los conjuntos solución de estas dos nuevas desigualdades nos daráSol$_2$.

$$0 < x^2 < 8 \Longleftrightarrow 0 < x^2 \quad y \quad x^2 < 8$$

Por la primera, $0 < x^2$, es evidente que $\text{Sol}_a = \mathbb{R} - \{0\}$.

Para la segunda, $x^2 < 8$, procedemos de la siguiente manera:

$$x^2 < \sqrt{8} \Longleftrightarrow |x| < \sqrt{8} \Longleftrightarrow -\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$$

De manera que el conjunto solución de esta desigualdad está dado por $\text{Sol}_b = (-\sqrt{8}, \sqrt{8})$.

Como se dijo anteriormente

$$\text{Sol}_2 = \text{Sol}_a \cap \text{Sol}_b = [\mathbb{R} - \{0\}] \cap (-\sqrt{8}, \sqrt{8}) = (-\sqrt{8}, \sqrt{8}) - \{0\} = (-\sqrt{8}, 0) \cup (0, \sqrt{8})$$

Finalmente, intersectamos las dos soluciones principales Sol$_1$ y Sol$_2$

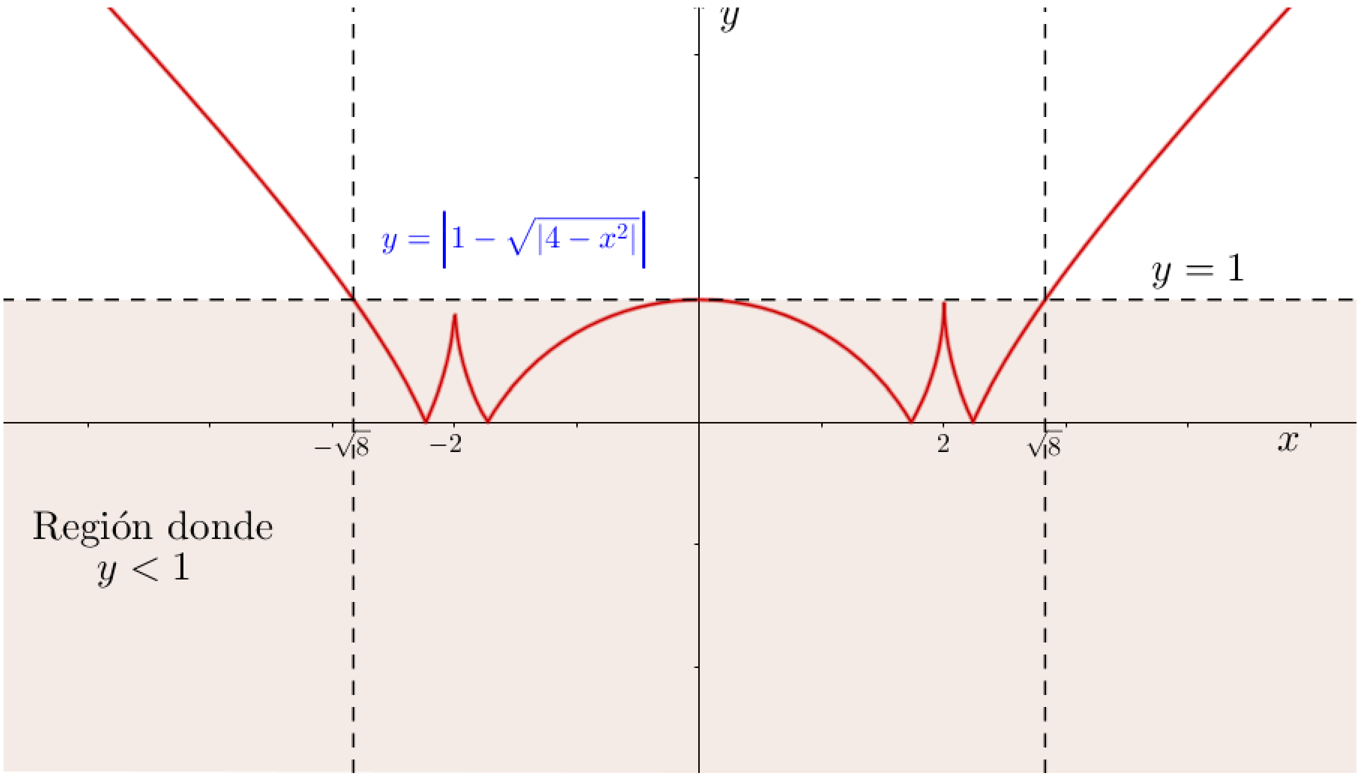
$$\begin{aligned} \text{Sol}_g = \text{Sol}_1 \cap \text{Sol}_2 &= [\mathbb{R} - \{-2, 2\}] \cap (-\sqrt{8}, 0) \cup (0, \sqrt{8}) \\ &= (-\sqrt{8}, 0) \cup (0, \sqrt{8}) - \{-2, 2\} \\ &= (-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8}) \end{aligned}$$

Una forma alternativa de escribir la solución es $(-\sqrt{8}, \sqrt{8}) - -2, 0, 2$.

Se adjunta la gráfica de la función

$$y = \left|1 - \sqrt{|4 - x^2|}\right|$$

con la esperanza de que usted entienda mejor los procedimientos realizados.



Ejemplo 8. Suponga que $0 < a < b < c$, resuelva para x la siguiente desigualdad:

$$\frac{x^2 + (a-b)x - ab}{x + c} \geqslant 0$$

Solución:

Como para cualquier otra desigualdad debemos comparar con cero y factorizar para conocer los puntos de interés. El primer paso está hecho procedemos con el segundo:

$$\frac{x^2 + (a-b)x - ab}{x + c} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{(x+a)(x-b)}{x+c} \geqslant 0$$

Una vez hecha la factorización es evidente que nuestros puntos de interés están localizados en $x = -a$, $x = b$, $x = -c$, por ser la raíces de los polinomios del numerador y del denominador.

Note que debido a que $0 < a < b < c$ entonces podemos escribir

$$0 < a < b < c \Longrightarrow a < c \Longleftrightarrow -a > -c$$

En otras palabras dado que a y c son números positivos al tener un negativo se convierten en números negativos y su relación está dada por $-a > -c$ es decir ahora $-a$ es mayor que $-c$, así mismo, b al ser un numero positivo es mayor que $-a$ y $-c$, por lo tanto los intervalos de interés se representan a continuación en el siguiente estudio de signos (cementerio).

	$(-\infty, -c)$	$(-c, -a]$	$[-a, b]$	$[b, +\infty)$
$x + a$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - b$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + c$	$-$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

Finalmente, del estudio de signos se tiene que la desigualdad se cumple para:

$$x \in (-c, -a] \cup [b, +\infty)$$

Ejemplo 9. Suponga que a, b, c y d son números positivos tales que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Demuestre que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Solución:

Comenzamos trabajando la expresión $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, proyectando que, como la desigualdad a la que tenemos que llegar es una desigualdad combinada, estaremos llegando a alguna de las dos que conforman dicha desigualdad.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0 \Longleftrightarrow \frac{ad - cb}{bd} < 0$$

Como bd es el producto de dos números positivos distintos de cero entonces podemos multiplicar a ambos lados de la desigualdad por bd y obtener

$$ad - cb < 0$$

Ahora, sumamos a ambos lados de la desigualdad ab [3].

$$ad - cb < 0 \Longleftrightarrow ab + ad - cb < ab \Longleftrightarrow ab + ad < ab + cb \Longleftrightarrow a(b + d) < b(a + c)$$

[3] Este paso no lo va a encontrar en ningún libro, esto forma parte de su bagaje, creatividad y malicia al resolver problemas.

Nuevamente, dado que a, b, c, d son positivos distintos de cero podemos dividir sin inconvenientes a ambos lados de la desigualdad

$$a(b + d) < b(a + c) \iff \frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d}$$

Observe que esta desigualdad es precisamente una de las involucradas en la desigualdad a la que queremos llegar. Ahora nuestro objetivo es conseguir la otra para integrarlas en una sola desigualdad combinada y quedará demostrada la proposición.

Procedemos exactamente igual hasta el siguiente paso:

Sumamos a ambos lados de la desigualdad cd

$$ad - cb < 0 \iff cd + ad - cb < cd \iff cd + ad < cd + cb \iff d(c + a) < c(d + b)$$

Ahora, retomando el procedimiento anterior:

$$d(c + a) < c(d + b) \iff \frac{c + a}{d + b} < \frac{c}{d} \iff \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$$

Hemos obtenido la otra parte de la desigualdad combinada, ahora observe que si a, b, c y d son números positivos y distintos de cero y además $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces se cumple que

$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} \quad \text{y} \quad \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$$

lo cual es equivalente a escribir

$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$$

Finalmente, hemos demostrado que si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ con $a, b, c, d > 0$ entonces $\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$.

Bibliografía.

- **Demidovich, B.** (1967). *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*(2a. ed.). Moscú: Editorial Mir.
- **Dennis, G. Zill y Warren, S. Wright.** (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (4a. ed.).México, D. F.: McGraw Hill.
- **Valera, M. T.** *Guías de Ejercicios.* Universidad Simón Bolívar.
- **Guzmán M.A.** (2014). *Guía de Ejercicios de Matemáticas 1 con Soluciones.* Universidad Simón Bolívar.

Este material fue, resuelto y tipeado en LaTeX por Miguel Ángel Labrador para uso de toda la comunidad académica. Algunos ejercicios fueron tomados de parciales realizados en cursos de MA-1111 de la Universidad Simón Bolívar.

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección **miguelangel2801@gmail.com**.

Este material se actualizó por última vez en **diciembre de 2017**.