CLASE 12

1. Distribuciones de probabilidad marginal y condicional

Definición:

a Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias conjuntas discretas con función de probabilidad conjunta $p(y_1, y_2)$. Entonces las funciones de probabilidad marginal de Y_1 y Y_2, respectivamente, están determinadas por:

$$p_1(y_1) = \sum_{y_2} p(y_1, y_2)$$

y

$$p_2(y_2) = \sum_{y_1} p(y_1, y_2)$$

b Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias continuas conjuntas con función de densidad conjunta $f(y_1, y_2)$. Entonces, las funciones de densidad marginal de Y_1 y Y_2, respectivamente, están determinadas por:

$$f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2$$

y

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1$$

Definición:

a Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias discretas conjuntas con función de probabilidad conjunta $p(y_1, y_2)$ y funciones de probabilidad marginal $p_1(y_1)$ y $p_2(y_2)$, respectivamente, entonces la función de probabilidad discreta condicional de Y_1, dado Y_2, es

$$p(y_1|y_2) = P(Y_1 = y_1|Y_2 = y_2) = \frac{P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)}{P(Y_2 = y_2)} = \frac{p(y_1, y_2)}{p_2(y_2)}$$

siempre y cuando $p_2(y_2) > 0$.

b Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias continuas conjuntas con función de densidad conjunta $f(y_1, y_2)$, entonces la función de distribución condicional de Y_1, dado $Y_2 = y_2$ es

$$F(y_1|y_2) = P(Y_1 \leq y_1|Y_2 = y_2)$$

c Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias continuas conjuntas con densidad conjunta $f(y_1, y_2)$ y densidades marginales $f_1(y_1)$ y $f_2(y_2)$, respectivamente. Para cualquier y_2 tal que $f_2(y_2) > 0$, la densidad condicional de Y_1, dado $Y_2 = y_2$, está determinada por

$$f(y_1|y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_2(y_2)}$$

Ejemplo. Usando los datos del ejercicio de los accidentes de niños de la clase pasada

a Proporcione las funciones de probabilidad marginal de Y_1 y Y_2.
b Proporcione la función de probabilidad condicional de Y_2 dado que $Y_1 = 0$.
c ¿Cuál es la probabilidad de que un niño sobreviva si viajaba en un asiento para bebé?.

Solución.
a) Es claro a partir del cuadro dado que

$$P(Y_1 = y_1) = \begin{cases} 0{,}76 & , \quad y_1 = 0 \\ 0{,}24 & , \quad y_1 = 1 \end{cases}$$

Igualmente

$$P(Y_2 = y_2) = \begin{cases} 0{,}55 & , \quad y_2 = 0 \\ 0{,}16 & , \quad y_2 = 1 \\ 0{,}29 & , \quad y_2 = 2 \end{cases}$$

b) Ahora, para hallar la función de probabilidad condicional debemos calcular las probabilidades de cada valor de Y_2 dado el valor de $Y_1 = 0$.

$$P(Y_2 = 0|Y_1 = 0) = \frac{P(Y_1 = 0, Y_2 = 0)}{P(Y_1 = 0)} = \frac{p(0,0)}{p_1(0)} = \frac{0{,}38}{0{,}76} = \frac{19}{38}.$$

$$P(Y_2 = 1|Y_1 = 0) = \frac{P(Y_1 = 0, Y_2 = 1)}{P(Y_1 = 0)} = \frac{p(0,1)}{p_1(0)} = \frac{0{,}14}{0{,}76} = \frac{7}{38}.$$

$$P(Y_2 = 2|Y_1 = 0) = \frac{P(Y_1 = 0, Y_2 = 2)}{P(Y_1 = 0)} = \frac{p(0,2)}{p_1(0)} = \frac{0{,}24}{0{,}76} = \frac{12}{38}.$$

Entonces la función de probabilidad condicional es

$$P(Y_2|Y_1 = 0) = \begin{cases} \frac{19}{38} & , \quad y_2 = 0 \\ \frac{7}{38} & , \quad y_2 = 1 \\ \frac{12}{38} & , \quad y_2 = 2 \end{cases}$$

c) La probabilidad que nos piden es:

$$P(Y_1 = 0|Y_2 = 2) = \frac{p(0,2)}{p_2(2)} = \frac{0{,}24}{0{,}29} = 0{,}83.$$

Ejercicio. Para el ejemplo de la gasolina de la clase pasada

a Encuentre la función de densidad marginal de Y_2.

b ¿Cuál es la probabilidad de que se venda más de medio tanque, si éste contiene gasolina tres cuartas partes de su capacidad?

Solución.

a) Para hallar la función de densidad marginal hacemos lo siguiente

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)dy_1 = \int_{y_2}^{1} 3y_1 dy_1 = \left[3y_1^2\right]_{y_2}^{1} = \frac{3}{2}\left(1 - y_2^2\right).$$

Claramente esto se cumple para $0 \leq y_2 \leq 1$.

b) Lo que nos piden es $P(Y_2 > \frac{1}{2}|Y_1 = \frac{3}{4})$. Para calcular esta probabilidad necesitamos $f(y_2|y_1)$, y a su vez para está necesitamos $f_1(y_1)$.

$$f_1(y_1) = \int_0^{y_1} 3y_1 dy_2 = 3y_1^2.$$

con $0 \leq y_1 \leq 1$. Luego

$$f(y_2|y_1) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_1(y_1)} = \frac{3y_1}{3y_1^2} = \frac{1}{3y_1}$$

Por lo tanto:

$$P\left(Y_2 > \frac{1}{2}|Y_1 = \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f\left(y_2|y_1 = \frac{3}{4}\right) dy_2$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{4}{3} dy_2 = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

2. Variables aleatorias independientes

Definición: Sean $F_1(y_1)$ y $F_2(y_2)$ funciones de distribución de Y_1 y Y_2, respectivamente, y $F(y_1, y_2)$ la función de distribución conjunta de Y_1 y Y_2. Entonces, se dice que Y_1 y Y_2 son independientes si y sólo si

$$F(y_1, y_2) = F_1(y_1)F_2(y_2)$$

para todo par de números reales (y_1, y_2). Si Y_1 y Y_2 no son independientes, se dice que son dependientes.

Teorema: Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta $p(y_1, y_2)$ y funciones de probabilidad marginal $p_1(y_1)$ y $p_2(y_2)$, respectivamente, entonces Y_1 y Y_2 son independientes si y sólo si

$$p(y_1, y_2) = p_1(y_1)p_2(y_2)$$

para todo par de números reales (y_1, y_2).

Si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta $f(y_1, y_2)$ y funciones de densidad marginal $f_1(y_1)$ y $f_2(y_2)$, respectivamente, entonces Y_1 y Y_2 son independientes si y sólo si

$$f(y_1, y_2) = f_1(y_1) f_2(y_2)$$

para todo par de números reales (y_1, y_2).

TEOREMA: Supongamos que Y_1 y Y_2 tienen densidad conjunta $f(y_1, y_2)$, la cual es positiva si y sólo si $a \leq y_1 \leq b$ y $c \leq y_2 \leq d$, para las constantes a, b, c y d; en otro caso, $f(y_1, y_2) = 0$. Entonces Y_1 y Y_2 son independientes si y sólo si

$$f(y_1, y_2) = g(y_1) h(y_2)$$

donde $g(y_1)$ es una función no negativa de Y_1 y $h(y_2)$ es una función no negativa de Y_2.

EJEMPLO. Para el ejercicio de los accidentes con niños, ¿serán independientes Y_1 y Y_2?

SOLUCIÓN.
Para que las variables sean independientes se debe cumplir que $p(y_1, y_2) = p_1(y_1) p_2(y_2)$ para cualquier (y_1, y_2) que se tome, por lo tanto $p(0, 0) = p_1(0) p_2(0)$. $p(0, 0) = 0{,}38$, mientras que $p_1(0) p_2(0) = 0{,}76 \times 0{,}55 = 0{,}42$. Luego como $p(0, 0) \neq p_1(0) p_2(0)$, entonces concluimos que Y_1 y Y_2 son dependientes.

EJEMPLO. Para el ejercicio de los niveles de gasolina, ¿serán independientes Y_1 y Y_2?

SOLUCIÓN.
Para variables aleatorias continuas decimos que Y_1 y Y_2 son independientes si y solo si $f(y_1, y_2) = f_1(y_1) f_2(y_2)$. Por lo calculado anteriormente $f_1(y_1) f_2(y_2) \neq f(y_1, y_2)$, por lo tanto diremos que Y_1 y Y_2 son dependientes.