Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
2^{do} Examen Parcial (35 %)
Sep-Dic 2017

Turno 7-8
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (6 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{[\![x]\!] - x}{3 - x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{[\![x]\!] - x}{3 - x} = \frac{2-3}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Pregunta 2. (6 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+2x^2} - \sqrt[3]{x^3+2}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+2x^2} - \sqrt[3]{x^3+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{x^3+2}\right)^3}{\sqrt[3]{\left(x^3+2x^2\right)^2} + \sqrt[3]{x^3+2x^2}\,\sqrt[3]{x^3+2} + \sqrt[3]{\left(x^3+2\right)^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 2}{\sqrt[3]{\left(x^3+2x^2\right)^2} + \sqrt[3]{x^3+2x^2}\,\sqrt[3]{x^3+2} + \sqrt[3]{\left(x^3+2\right)^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x^2-2}{x^2}}{\dfrac{\sqrt[3]{\left(x^3+2x^2\right)^2}}{x^2} + \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2}}{x}\,\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x} + \dfrac{\sqrt[3]{\left(x^3+2\right)^2}}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 - 2/x^2}{\sqrt[3]{\left(1+2/x\right)^2} + \sqrt[3]{1+2/x}\,\sqrt[3]{1+2/x^3} + \sqrt[3]{\left(1+2/x^3\right)^2}}$$

$$= 2/3$$

Pregunta 3. (6 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}$

Solución:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)\left(\sqrt{2x-x^2}+1\right)}{2x-x^2-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)\left(\sqrt{2x-x^2}+1\right)}{-(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{2x-x^2}+1}{1-x} = \frac{2}{0^+} = \infty$$

Pregunta 4. (6 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{\cot(x)-1}$

Solución:

$$\lim_{x \to \pi/4} \frac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{\cot(x)-1} = \lim_{x \to \pi/4} \frac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}-1}$$

$$= \lim_{x \to \pi/4} \frac{\big(\operatorname{sen}(x)-\cos(x)\big)\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \to \pi/4} \Big(-\operatorname{sen}(x)\Big) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Pregunta 5. (4 ptos.) Demuestre, usando la definición de límite, que $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2-2x\right) = 0$.

Solución: Como el dominio de la función cuya expresión viene dada por x^2-2x es $\mathbb{R}$, consideremos un valor fijo $\delta_{\text{máx}} \in (0,\infty)$. Dado $\epsilon > 0$ queremos hallar $\delta = \delta(\epsilon) \in (0, \delta_{\text{máx}}]$ tal que

$$0 < |x-2| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|x^2-2x\right| < \epsilon.$$

Como

$$\left|x^2-2x\right| = |x(x-2)| = |x|\,|x-2|$$

y

$$\begin{aligned} |x-2| < \delta \leq \delta_{\text{máx}} \quad &\Longrightarrow \quad -\delta_{\text{máx}} < x-2 < \delta_{\text{máx}} \\ &\Longrightarrow \quad -\left(2+\delta_{\text{máx}}\right) < 2-\delta_{\text{máx}} < x < 2+\delta_{\text{máx}} \\ &\Longrightarrow \quad |x| < 2+\delta_{\text{máx}} \end{aligned}$$

entonces $\delta = \text{mín}\left(\dfrac{\epsilon}{2+\delta_{\text{máx}}}\,,\,\delta_{\text{máx}}\right)$ es tal que

$$0 < |x-2| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|x^2 - 2x\right| = |x|\,|x-2| < \left(2+\delta_{\text{máx}}\right)\delta \leq \epsilon.$$

Pregunta 6. (5 ptos.) Determine, de ser posible, el valor de k para que la función

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}} & , \text{ si } x \neq 0 \\ k & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

sea continua en 0.

Solución: Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ es necesario que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ exista y sea igual a $f(0) = k$. Como $\big(1-\cos(2x)\big) \geq 0$ y $\big(1+\cos(2x)\big) > 0$ si $x \in \left(-\pi/2, \pi/2\right)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} -\sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{|x|} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{\sqrt{1-\cos^2(2x)}}{|x|\sqrt{1+\cos(2x)}} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sqrt{\text{sen}^2(2x)}}{|x|\sqrt{1+\cos(2x)}} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{\left|\text{sen}(2x)\right|}{|x|\sqrt{1+\cos(2x)}} = \lim_{x\to 0} \left|\frac{\text{sen}(2x)}{2x}\right| \frac{-2}{\sqrt{1+\cos(2x)}} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

haciendo uso del límite trigonométrico notable $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = 1$. Así, f es continua en 0 si $k = -\sqrt{2}$.

Pregunta 7. (2 ptos.) Si f es una función continua en $x = d$ y $h(x) = (x-d)\,f(x)$, halle $h'(d)$.

Solución: Como f es continua en $x = d$ entonces h también lo es por ser producto de funciones continuas en ese punto. Además, $h(d) = 0$ y $\lim\limits_{x\to d} f(x) = f(d)$. Luego,

$$h'(d) = \lim_{x\to d} \frac{h(x)-h(d)}{x-d} = \lim_{x\to d} \frac{(x-d)\,f(x) - 0}{x-d} = \lim_{x\to d} f(x) = f(d).$$