Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
2^{do} Examen Parcial (35 %)
Sep-Dic 2017

Turno 5-6
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (6 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\big(1-\sqrt{x}\big)\big(1+\sqrt{x}\big)\big(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\big)}{\big(\sqrt[3]{x}-1\big)\big(1+\sqrt{x}\big)\big(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\big)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\big(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\big)}{(x-1)\big(1+\sqrt{x}\big)}=\lim_{x\to 1}\frac{-\big(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\big)}{1+\sqrt{x}}=\frac{-3}{2}$$

Pregunta 2. (6 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+2x+4}{x^2+x-6}$

Solución:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+2x+4}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+2x+4}{(x+3)(x-2)}=\frac{12}{5}\,\frac{1}{0^-}=-\infty$$

Pregunta 3. (6 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}^2(2x)}{x-x\cos(x)}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}^2(2x)}{x-x\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\frac{4\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)}{1-\cos(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\frac{4\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\,\big(1+\cos(x)\big)}{1-\cos^2(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,4\cos^2(x)\,\big(1+\cos(x)\big)$$

$$=4\Bigg(\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{=1}\Bigg)\Bigg(\lim_{x\to 0}\cos^2(x)\,\big(1+\cos(x)\big)\Bigg)=8$$

Pregunta 4. (6 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2x^3+x-1}-\sqrt{x^2-3x}}{3x+2}$

Solución: Como x tiende a $-\infty$, entonces $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ pero $\sqrt[3]{x^3}=x$. Así,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^3+x-1}-\sqrt{x^2-3x}}{3x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{2x^3+x-1}}{x}-\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{x}}{\dfrac{3x+2}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{2x^3+x-1}}{x}-\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{x}}{3+{}^{2}\!/_{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{2x^3+x-1}}{\sqrt[3]{x^3}}-\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{-\sqrt{x^2}}}{3+{}^{2}\!/_{x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{2+\left({}^{1}\!/_{x}\right)^2-\left({}^{1}\!/_{x}\right)^3}+\sqrt{1-{}^{3}\!/_{x}}}{3+{}^{2}\!/_{x}} = \frac{\sqrt[3]{2}+1}{3}$$

Pregunta 5. (4 ptos.) Demuestre, usando la definición de límite, que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2(1+x)}{2x}=0$.

Solución: Como el dominio de la función cuya expresión viene dada por $\frac{x^2(1+x)}{2x}$ es $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y el límite se está tomando cuando x tiende a 0, consideremos un valor fijo $\delta_{\text{máx}}\in(0,\infty)$. Dado $\epsilon>0$ queremos hallar $\delta=\delta(\epsilon)\in(0,\delta_{\text{máx}}]$ tal que

$$0<|x|<\delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{x^2(1+x)}{2x}\right|<\epsilon.$$

Como

$$\left|\frac{x^2(1+x)}{2x}\right| = \frac{1}{2}\,|x|\,|1+x|$$

y

$$\begin{aligned}
|x|<\delta\le\delta_{\text{máx}} &\implies -\delta_{\text{máx}}<x<\delta_{\text{máx}}\\
&\implies -\big(1+\delta_{\text{máx}}\big)<1-\delta_{\text{máx}}<1+x<1+\delta_{\text{máx}}\\
&\implies |1+x|<1+\delta_{\text{máx}}
\end{aligned}$$

entonces $\delta = \text{mín}\left(\dfrac{2\epsilon}{1+\delta_{\text{máx}}}\,,\,\delta_{\text{máx}}\right)$ es tal que

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x^2(1+x)}{2x}\right| = \frac{1}{2}\,|x|\,|1+x| < \frac{1}{2}\,\delta\big(1+\delta_{\text{máx}}\big) \leq \epsilon.$$

Pregunta 6. (5 ptos.) Sea

$$f(x) = \begin{cases} -3\,g(0) & ,\ \text{si } x = 0 \\ \big(g(x)\big)^2 - 2\,h(x) & ,\ \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Si se sabe que la función g es continua en 0 y $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 3$, determine las condiciones mínimas que debe cumplir la función h para que f sea continua en 0.

Solución: Como g es continua en 0 entonces

$$g(0) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = 3.$$

Para que f sea continua en 0 es necesario que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ exista y sea igual a $f(0) = -3\,g(0) = -9$. Usando las propiedades de los límites tenemos que

$$\begin{aligned} -9 = \lim_{x\to 0} f(x) \ &= \ \lim_{x\to 0}\Big(\big(g(x)\big)^2 - 2\,h(x)\Big) \\ &= \ \Big(\lim_{x\to 0} g(x)\Big)^2 - 2\Big(\lim_{x\to 0} h(x)\Big) = 9 - 2\Big(\lim_{x\to 0} h(x)\Big) \end{aligned}$$

siempre que $\Big(\lim\limits_{x\to 0} h(x)\Big)$ exista. Así, para que f sea continua en 0 es necesario que $\Big(\lim\limits_{x\to 0} h(x)\Big)$ exista y sea igual a 9.

Pregunta 7. (2 ptos.) Si h es una función continua en $x = c$ y $g(x) = (x-c)\,h(x)$, halle $g'(c)$.

Solución: Como h es continua en $x = c$ entonces g también lo es por ser producto de funciones continuas en ese punto. Además, $g(c) = 0$ y $\lim\limits_{x\to c} h(x) = h(c)$. Luego,

$$g'(c) = \lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\frac{(x-c)\,h(x) - 0}{x-c} = \lim_{x\to c} h(x) = h(c).$$