Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
2^{do} Examen Parcial (35 %)
Sep-Dic 2017

Turno 3-4
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (6 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}}$

Solución:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-3)\left(3+\sqrt{6x-x^2}\right)}{\left(3-\sqrt{6x-x^2}\right)\left(3+\sqrt{6x-x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-3)\left(3+\sqrt{6x-x^2}\right)}{3^2-6x+x^2} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-3)\left(3+\sqrt{6x-x^2}\right)}{(x-3)^2}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{3+\sqrt{6x-x^2}}{x-3} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

Pregunta 2. (6 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\operatorname{sen}(\pi x)}$

Solución: Como $\operatorname{sen}(\pi x) = \operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{2}x\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\operatorname{sen}(\pi x)} &= \lim_{x\to 1} \frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(1+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)} = \frac{0}{4} = 0
\end{aligned}$$

Pregunta 3. (6 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{3-\sqrt{x^2+5}}$

Solución:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(x^2-4\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{\left(3-\sqrt{x^2+5}\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(x^2-4\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{4-x^2} = \lim_{x\to 2} -\left(3+\sqrt{x^2+5}\right) = -6$$

Pregunta 4. (6 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+2x^2}}{2x-3}$

Solución: Como x tiende a $-\infty$, entonces $x = -|x| = -\sqrt{x^2}$. Así,

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+2x^2}}{2x-3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{\sqrt{1+2x^2}}{x}}{\frac{2x-3}{x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{\sqrt{1+2x^2}}{-\sqrt{x^2}}}{2-{}^3\!/_x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{\left({}^1\!/_x\right)^2+2}}{2-{}^3\!/_x} = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Pregunta 5. (4 ptos.) Demuestre, usando la definición de límite, que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = {}^1\!/_2$.

Solución: Como el dominio de la función cuya expresión viene dada por $\frac{x}{x+1}$ es $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, el límite se está tomando cuando x tiende a 1 y la distancia entre 1 y -1 es 2, consideremos un valor fijo $\delta_{\text{máx}} \in (0,2)$. Dado $\epsilon > 0$ queremos hallar $\delta = \delta(\epsilon) \in (0, \delta_{\text{máx}}]$ tal que

$$0 < |x-1| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon.$$

Como

$$\left|\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-1}{2(x+1)}\right| = \frac{1}{2}\frac{|x-1|}{|x+1|}$$

y

$$\begin{aligned}
|x-1|<\delta\leq\delta_{\text{máx}} &\implies -\delta_{\text{máx}}<x-1<\delta_{\text{máx}}\\
&\implies 0<2-\delta_{\text{máx}}<x+1<2+\delta_{\text{máx}}\\
&\implies \frac{1}{|x+1|}<\frac{1}{2-\delta_{\text{máx}}}
\end{aligned}$$

entonces $\delta = \text{mín}\Big(2(2-\delta_{\text{máx}})\epsilon\,,\,\delta_{\text{máx}}\Big)$ es tal que

$$0<|x-1|<\delta \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\frac{|x-1|}{|x+1|} < \frac{\delta}{2(2-\delta_{\text{máx}})} \leq \epsilon.$$

Pregunta 6. (5 ptos.) Sea

$$f(x) = \begin{cases} bx^2+ax+3 & ,\text{ si } x\leq -1\\ \text{arcsen}(x) & ,\text{ si } |x|<1\\ ax+b & ,\text{ si } 1\leq x\end{cases}$$

con $a,b\in\mathbb{R}$. Halle los valores de a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución: La función es continua en los intervalos $(-\infty,-1]$ y $[1,\infty)$ por ser algebraica explícita en esas regiones y todos los puntos en esos intervalos están en el dominio de la función. En el intervalo $(-1,1)$ es continua por el siguiente argumento: como $\text{sen}\big(\text{arcsen}(x)\big) = x$ para todo $x\in(-1,1)$ entonces

$$\lim_{x\to a}\text{sen}\big(\text{arcsen}(x)\big) = \lim_{x\to a} x = a$$

para todo $a\in(-1,1)$. Como la función seno es continua tenemos que

$$\lim_{x\to a}\text{sen}\big(\text{arcsen}(x)\big) = \text{sen}\Big(\lim_{x\to a}\text{arcsen}(x)\Big).$$

Finalmente, como $\operatorname{sen}\left(\lim\limits_{x\to a} \operatorname{arcsen}(x)\right) = a$ se tiene entonces que

$$\lim_{x\to a} \operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{arcsen}(a)$$

para todo $a \in (-1,1)$ lo que determina que f es continua en ese intervalo.
Para que f sea continua en $x=-1$ es necesario que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1).$$

Como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} \left(bx^2+ax+3\right) = b-a+3 = f(-1) \\
\lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} \operatorname{arcsen}(x) = -\pi/2
\end{aligned}$$

entonces f es continua en $x=-1$ si $b-a+3 = -\pi/2$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arcsen}(x) = \pi/2 \\
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} ax+b = a+b = f(1)
\end{aligned}$$

por lo que f es continua en $x=1$ si $a+b=\pi/2$.
Así, f será continua en todo $\mathbb{R}$ si a y b satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} b-a+3 = -\pi/2 \\ a+b = \pi/2 \end{cases}$$

cuya solución es $a = \dfrac{3+\pi}{2}$ y $b = \dfrac{-3}{2}$.

Pregunta 7. (2 ptos.) Si f es una función continua en $x=b$ y $g(x) = (x-b)\,f(x)$, halle $g'(b)$.

Solución: Como f es continua en $x=b$ entonces g también lo es por ser producto de funciones continuas en ese punto. Además, $g(b)=0$ y $\lim\limits_{x\to b} f(x) = f(b)$. Luego,

$$g'(b) = \lim_{x\to b} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} = \lim_{x\to b} \frac{(x-b)\,f(x)-0}{x-b} = \lim_{x\to b} f(x) = f(b).$$