Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
$1^{\text{er}}$ Examen Parcial (30 %)
Sep-Dic 2017

Turno 5-6
Duración: 1 hora 50 minutos

## Respuestas

**Pregunta 1.** (8 ptos.) Encuentre los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{|x-2|-x}{|x|-3} \leq 1$$

**Solución:** Es necesario excluir los valores $-3$ y $3$ ya que $|x|-3=0$ si, y sólo si $x=-3$ o $x=3$.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & , \text{si } x \geq 2 \\ 2-x & , \text{si } x < 2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad |x| = \begin{cases} x & , \text{si } x \geq 0 \\ -x & , \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si $x \in (-\infty, 0) \setminus \{-3\}$

$$\begin{aligned} \frac{|x-2|-x}{|x|-3} \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{2-x-x}{-x-3} \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{2(x-1)}{x+3} - 1 \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{x-5}{x+3} \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad x \in \Big((-\infty,0)\setminus\{-3\}\Big) \bigcap (-3,5] = (-3,0) \end{aligned}$$

Si $x \in [0,2)$

$$\begin{aligned} \frac{|x-2|-x}{|x|-3} \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{2-x-x}{x-3} \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{2-2x}{x-3} - 1 \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{x-5/3}{x-3} \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad x \in [0,2) \bigcap \Big( (-\infty, 5/3] \cup (3,\infty) \Big) = \big[0, 5/3\big] \end{aligned}$$

Si $x \in [2,\infty) \setminus \{3\}$

$$\begin{aligned} \frac{|x-2|-x}{|x|-3} \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{x-2-x}{x-3} \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{-2}{x-3} \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{x-1}{x-3} \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad x \in \Big([2,\infty)\setminus\{3\}\Big) \bigcap \Big((-\infty,1] \cup (3,\infty)\Big) = (3,\infty) \end{aligned}$$

Así, la solución general es

$$x \in (-3,0) \cup \big[0, {}^5\!/\!_3\big] \cup (3,\infty) = \big(-3, {}^5\!/\!_3\big] \cup \big(3,\infty\big).$$

**Pregunta 2.** (7 ptos.) Halle el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{9-x^2}} + \sqrt{\frac{x^3-27}{1-x^2}}$$

**Solución:** Notemos que $x$ pertenece al dominio de $f$ si, y sólo si, $\frac{x^2-4}{9-x^2} \geq 0$ y $\frac{x^3-27}{1-x^2} \geq 0$. Primeramente, debemos exlcuir los valores $-3$, $-1$, $1$ y $3$. Como

$$\frac{x^2-4}{9-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-3,-2] \cup [2,3) \quad \text{y} \quad \frac{x^3-27}{1-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,3]$$

el dominio de $f$ es el conjunto

$$\Big(\big((-3,-2] \cup [2,3)\big) \bigcap \big((-\infty,-1) \cup (1,3]\big)\Big) \setminus \{-3,-1,1,3\} = (-3,-2] \cup [2,3).$$

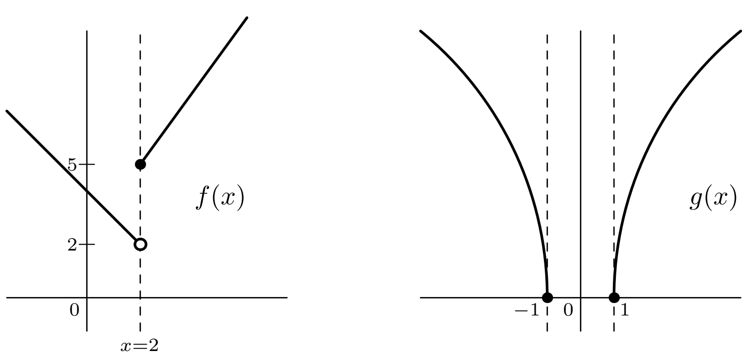
**Pregunta 3.** (7 ptos.) Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{, si } x < 2 \\ 3x-1 & \text{, si } x \geq 2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{x^2-1}$$

a. Haga un bosquejo de las gráficas de las funciones;

b. Determine $f \circ g$.

**Solución:**



$$(f\circ g)(x) = \begin{cases} -g(x)+4 & , \text{si } g(x)<2 \\ 3g(x)-1 & , \text{si } g(x)\geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\sqrt{x^2-1}+4 & , \text{si } x\in\big(-\sqrt{5},-1\big]\bigcup\big[1,\sqrt{5}\big) \\ 3\sqrt{x^2-1}-1 & , \text{si } x\in\big(-\infty,-\sqrt{5}\big]\bigcup\big[\sqrt{5},\infty\big) \end{cases}$$

Ya que

$$\begin{aligned} g(x)<2 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}<2 \Leftrightarrow 0\leq x^2-1<4 \Leftrightarrow 1\leq x^2<5 \\ &\Leftrightarrow 1\leq |x| \text{ y } |x|<\sqrt{5} \Leftrightarrow x\in\Big((-\infty,-1]\cup[1,\infty)\Big)\bigcap\big(-\sqrt{5},\sqrt{5}\big) \\ &\Leftrightarrow x\in\big(-\sqrt{5},-1\big]\cup\big[1,\sqrt{5}\big) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g(x)\geq 2 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}\geq 2 \Leftrightarrow x^2-1\geq 4 \Leftrightarrow x^2\geq 5 \Leftrightarrow |x|\geq\sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow x\in\big(-\infty,-\sqrt{5}\big]\bigcup\big[\sqrt{5},\infty\big) \end{aligned}$$

**Pregunta 4.** (8 ptos.) Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1,2)$, $B(2,1)$ y $C(-5,2)$.

**Solución:** La ecuación de la circunferencia centrada en el punto $(c_x,c_y)$ de radio $r$ es

$$(x-c_x)^2+(y-c_y)^2=r^2.$$

Como los puntos $A(1,2)$, $B(2,1)$ y $C(-5,2)$ pertenecen a la circunferencia, se tiene que

$$\begin{aligned} (1-c_x)^2+(2-c_y)^2 &= r^2 \\ (2-c_x)^2+(1-c_y)^2 &= r^2 \\ (-5-c_x)^2+(2-c_y)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

de donde, igualando estas ecuaciones de dos en dos, obtenemos que las coordenadas del centro satisfacen

$$\begin{aligned} c_x-c_y &= 0 \\ c_x+2 &= 0 \\ 7c_x-c_y+12 &= 0 \end{aligned}$$

(basta con obtener dos de estas ecuaciones). Así, $c_x=-2$ y $c_y=-2$. Luego, evaluando la ecuación de la circunferencia en cualquiera de los puntos conocidos ($A$, $B$ o $C$), obtenemos que el radio es igual a 5 (por ejemplo, evaluando en $A$ se tiene que $r^2=(1+2)^2+(2+2)^2=25$). Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia deseada es

$$(x+2)^2+(y+2)^2=25.$$