Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
1^{er} Examen Parcial (30 %)
Sep-Dic 2017

Turno 3-4
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (8 ptos.) Encuentre los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left|x^2-1\right|-1 \geq x$$

Solución:

$$\left|x^2-1\right| = \begin{cases} x^2-1 & , \text{ si } |x| \geq 1 \\ 1-x^2 & , \text{ si } |x| < 1 \end{cases}$$

Si $x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

$$\begin{aligned} \left|x^2-1\right|-1 \geq x &\Rightarrow x^2-1-1 \geq x \\ &\Rightarrow (x-2)(x+1) \geq 0 \\ &\Rightarrow x \in \Big((-\infty,-1] \cup [1,\infty)\Big) \bigcap \Big((-\infty,-1] \cup [2,\infty)\Big) \\ &\Rightarrow x \in (-\infty,-1] \cup [2,\infty) \end{aligned}$$

Si $x \in (-1,1)$

$$\begin{aligned} \left|x^2-1\right|-1 \geq x &\Rightarrow 1-x^2-1 \geq x \\ &\Rightarrow x(x+1) \leq 0 \\ &\Rightarrow x \in (-1,1) \cap [-1,0] = (-1,0] \end{aligned}$$

Así, la solución general es

$$x \in (-\infty,-1] \cup [2,\infty) \cup (-1,0] = (-\infty,0] \cup [2,\infty).$$

Pregunta 2. (7 ptos.) Halle el dominio de la función

$$f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

Solución: Notemos que x pertenece al dominio de f si, y sólo si, $\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right| \leq 1$ y esto es equivalente a resolver $0 \leq \frac{1-x}{1+x} \leq 1$. Como

$$0 \leq \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow x \in (-1,1]$$

$$\frac{1-x}{1+x} \leq 1 \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x}{1+x} \leq 0 \Rightarrow \frac{x}{1+x} \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-1) \cup [0,\infty)$$

el dominio de f es el conjunto $(-1,1] \cap \big((-\infty,-1) \cup [0,\infty)\big) = [0,1]$.

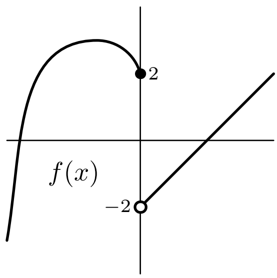
Pregunta 3. (7 ptos.) Dadas las funciones

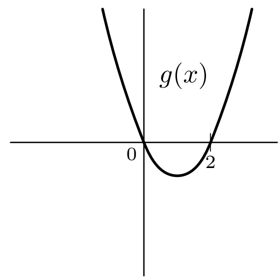
$$f(x) = \begin{cases} x-2 & , \text{si } x > 0 \\ -(x+1)^2 + 3 & , \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x(x-2)$$

a. Haga un bosquejo de las gráficas de las funciones;

b. Determine $f \circ g$.

Solución:





$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= \begin{cases} g(x) - 2 & , \text{si } g(x) > 0 \\ -\big(g(x)+1\big)^2 + 3 & , \text{si } g(x) \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x(x-2) - 2 & , \text{si } x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \\ -\big(x(x-2)+1\big)^2 + 3 & , \text{si } x \in [0, 2] \end{cases} \end{aligned}$$

Ya que

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x(x-2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

y

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 2].$$

Pregunta 4. (8 ptos.) Halle la ecuación de la circunferencia centrada en el punto $(6,0)$ y que es tangente a la recta $x - y - 1 = 0$.

Solución: Denotemos por (a,b) al punto donde la recta $x-y-1=0$ es tangente a la circunferencia; entonces $a - b - 1 = 0$. Como la pendiente de esta recta es igual a 1, la pendiente de la recta que pasa por el punto (a,b) y por el centro que la circunferencia (que es $(6,0)$) es igual a -1; entonces $-1 = \frac{b-0}{a-6}$, o equivalentemente, $a+b-6=0$. Resolviendo el sistema de ecuaciones que tenemos para a y b, obtenemos $a = 7/2$ y $b = 5/2$. Así, el radio de la circunferencia viene dado por

$$r^2 = \left(7/2 - 6\right)^2 + \left(5/2 - 0\right)^2 = 25/2$$

y, por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$(x-6)^2 + y^2 = 25/2.$$