UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS III (MA-1116)

Elaborado por
Miguel Labrador
12-10423
Ing. Electrónica

Solución Tercer Parcial Ene-Mar 2017 (40 %) Bloque 3-4

Problema 1: Sea $A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -12 & -14 \\ -18 & 0 & -36 & -36 \\ 12 & -6 & 24 & 18 \end{pmatrix}$

a) (4 puntos) Encuentre una base para ImA.

b) (2 puntos) Determine la dimensión de $N_A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = \vec{0}\}$.

c) (4 puntos) Indique y justifique si el vector $\vec{v} = (2, -1, 1) \in$ ImA.

Solución:

Parte a:

Se sabe, por teorema, que $\text{Im}A = C_A = gen\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ -36 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -14 \\ -36 \\ 18 \end{pmatrix} \right\}$

Para encontrar una base de ImA:

$$\begin{bmatrix} -6 & 18 & 12 \\ -2 & 0 & 6 \\ -12 & -36 & 24 \\ -14 & -36 & 18 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 7 & 18 & -9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 39 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 39 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De aquí, se tiene que una base para ImA está formada por el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Parte b:

Se sabe que la dimensión de ImA, es decir, $\rho(A) = 3$. Por teorema sabemos que $\nu(A)+\rho(A) = n$, donde n es el número de columnas de A, $n = 4$:

$$\Longrightarrow \nu(A) = 1$$

Parte c:

Vea que el vector $\vec{v} = (2, -1, 1)$ se puede escribir como:

$$(2, -1, 1) = 2(1, 0, 0) + (-1)(0, 1, 0) + (1)(0, 0, 1)$$

Como $\vec{v}$ se puede escribir como combinación lineal de la base de ImA que, valga la redundancia, genera a ImA entonces $\vec{v} \in$ ImA.

Otra forma, es observando que Im$A = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3$ y que $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, por lo tanto $\vec{v} \in$ ImA.

<u>**Problema 2:**</u> Sea $H = gen\{(1, 2, -1), (-1, -3, 2)\}$ subespacio de $\mathbb{R}^3$ con el producto interno:

$$< \vec{v_1}, \vec{v_2} >= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$$

a) (5 puntos) Encuentre una base ortonormal para H.

b) (5 puntos) Encuentre una base ortonormal para $H^{\perp}$.

Solución:

Parte a:

Para encontrar una base ortonormal de H primero necesitamos una base de H para aplicar el proceso de Gram-Schmidt.

Como $H = gen\{(1, 2, -1), (-1, -3, 2)\}$ y este conjunto es LI, dado que ninguno de los vectores es multiplo del otro, entonces $\{(1, 2, -1), (-1, -3, 2)\}$ constituye una base para H.

Aplicamos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.

Sea $B_{OH} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ una base ortonormal de H y sean $\vec{v_1} = (1, 2, -1)$ y $\vec{v_2} = (-1, -3, 2)$.

Para $\vec{u_1}$:

$$\vec{u_1} = \frac{\vec{v_1}}{\parallel \vec{v_1} \parallel}$$

Con

$$\parallel \vec{v_1} \parallel = \sqrt{< \vec{v_1}, \vec{v_1} >} = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Por lo tanto:

$$\vec{u_1} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$$

Para $\vec{u_2}$:

Buscamos un vector ortogonal a $\vec{u_1}$, $\vec{v_2}'$:

$$\begin{aligned}
\vec{v_2}' &= \vec{v_2} - < \vec{v_2}, \vec{u_1} > \vec{u_1} \\
&= (-1, -3, 2) - \frac{1}{\sqrt{6}}(-1 - 6 - 2)\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1) \\
&= (-1, -3, 2) + \frac{3}{2}(1, 2, -1) \\
&= \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Además:

$$\vec{u_2} = \frac{\vec{v_2}'}{\parallel \vec{v_2}' \parallel}$$

Con:

$$\parallel \vec{v_2}' \parallel = \sqrt{< \vec{v_2}', \vec{v_2}' >} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto:

$$\vec{u_2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Finalmente, una base ortonormal de H está dada por:

$$B_{OH} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right\}$$

Parte b:

Para encontrar una base ortonormal de $H^{\perp}$ primero hallamos una base de $H^{\perp}$.

Por definición se tiene que $H^{\perp} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \quad <\vec{x}, \vec{h}>= 0, \vec{h} \in H\}$

Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

$$
\begin{aligned}
<(x_1, x_2, x_3), (1, 2, -1)> = 0 &\Longrightarrow x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\
<(x_1, x_2, x_3), (-1, -3, 2)> = 0 &\Longrightarrow -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0
\end{aligned}
$$

Reducimos:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]
$$

De aquí se tiene que:

$$
\begin{cases} x_1 & = -x_3 \\ x_2 & = x_3 \\ x_3 & = x_3 \end{cases}
$$

Sea $(x_1, x_2, x_3) \in H^{\perp}$, entonces:

$$
(x_1, x_2, x_3) = (-x_3, x_3, x_3) = x_3(-1, 1, 1) \Longrightarrow H^{\perp} = gen\{(-1, 1, 1)\}
$$

Luego, una base para $H^{\perp}$ está dada por $\{(-1, 1, 1)\}$.

Utilizamos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt:

Sea $B_{OH^{\perp}} = \{\vec{u_1}\}$ una base ortonormal para el complemento ortogonal de H y sea $\vec{v_1} = (-1, 1, 1)$

$$
\vec{u_1} = \frac{1}{\parallel \vec{v_1} \parallel}\vec{v_1}
$$

Con

$$
\parallel \vec{v_1} \parallel = \sqrt{3} \Longrightarrow \vec{u_1} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)
$$

.

Finalmente, una base para $H^{\perp}$ está dada por:

$$\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

<u>**Problema 3:**</u> Sea $T : M_{2\times 2} \to P_2$ la transformación lineal dada por:

$$T\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} = (a_1 + a_2)x + (a_2 + a_3)x^2$$

a) (5 puntos) Encontrar A_T la matriz asociada a la transformación lineal.

b) (5 puntos) Encontrar una base para el núcleo de T y una base para ImT.

Solución:

Parte a:

Veamos como actúa la transformación lineal sobre los vectores de la base canónica del espacio de partida, $M_{2\times 2}$.

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x + x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De aquí, la matriz asociada a la transformación lineal, A_T, está dada por:

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Parte b:

Por definición:

$$NuT = \{\vec{v} \in M_{2\times 2} : T\vec{v} = \vec{0}\}$$

Sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$, entonces:

$$T\vec{v} = \vec{0}$$

$$T\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(a_1 + a_2)x + (a_2 + a_3)x^2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 &= 0 \\ a_2 + a_3 &= 0 \end{cases}$$

Reducimos el sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

De manera que:

$$NuT = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} : a_1 = a_3, a_2 = -a_3 \right\}$$

Hallamos una base para NuT:

Sea $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \in NuT$, es decir:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ -a_3 & a_3 \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

De aquí se nota que $NuT = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y además este conjunto es LI.

Luego, una base para NuT está constituida por:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Para encontrar $\text{Im}T$:

Por teorema conocemos que:

$$\text{Im}T = \text{Im}A_T = C_{A_T} = gen \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nota explicativa: Recuerde que los vectores escritos en la forma $\mathbb{R}^3$ representan a los vectores de P_2, en otras palabras, $\text{Im}T \subseteq P_2$. No se confunda, mantenga siempre en mente las definiciones.

Para hallar una base reducimos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De inmediato, una base para ImT está constituida por $\{x, x^2\}$. *Lea la nota explicativa.

Problema 4: Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

a) (4 puntos) Encuentre los autovalores y autovectores de A.

b) (3 puntos) Diga si A es diagonalizable. En caso afirmativo encuentre una matriz C y D una matriz diagonal, tal que $C^{-1}AC = D$ y $AC = CD$.

Solución:

Parte a:

Para encontrar los autovalores, primero calculamos el polinomio característico de A, $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow P(\lambda) = -(-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = -(\lambda - 1)^3$$

De aquí, es evidente que la solución de $P(\lambda) = 0$ es $\lambda = 1$. De manera que existe un autovalor con $ma(\lambda = 1) = 3$.

Para calcular los autovectores asociados al autovalor $\lambda = 1$, buscamos las soluciones generadas pro el sistema:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reducimos el sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De aquí se tiene que $\begin{cases} v_1 & = v_3 \\ v_2 & = v_3 \end{cases}$.

Sea $\vec{v'} \in E_1$, con E_1 el espacio característico asociado a $\lambda = 1$, entonces:

$$\vec{v'} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3' \\ v_3' \\ v_3' \end{pmatrix} = v_3' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si pedimos que $v_3 = 1$ entonces un autovector asociado a $\lambda = 1$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Note que como no hay tres autovectores linealmente independientes, por teorema, la matriz A no es diagonalizable.

<u>Problema 5:</u> (3 puntos) Demuestre que si λ es un autovalor de la matriz A de $n \times n$, entonces $\lambda + 2$ es autovalor de $A + 2I$.

Solución:

Si λ es un autovalor de A entonces λ satisface la ecuación:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Si sumamos y restamos dos dentro del determinante tenemos:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= 0 \\ det(A - \lambda I + 2I - 2I) &= 0 \\ det(A + 2I - (\lambda + 2)I) &= 0 \end{aligned}$$

Como $\lambda + 2$ satisface la ecuación $det(A + 2I - (\lambda + 2)I) = 0$ entonces $\lambda + 2$ es una autovalor de $A + 2I$.

Nota: Este parcial fue resuelto y digitalizado por Miguel Ángel Labrador para GUIAS USB.

Miguel Ángel
12-10423
Ingeniería Electrónica
@miguelangel2801

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección miguelangel2801@gmail.com