UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS III (MA-1116)

Elaborado por
Miguel Labrador
12-10423
Ing. Electrónica

Solución Primer Parcial Ene-Mar 2017 (25 %) Bloque 3-4

Problema 1: (7 puntos) Hallar el valor de la constante a para que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 4 \\ 3x + (a+5)y + 10z & = a + 12 \\ -x - 2y + (a-5)z & = a - 6 \end{cases}$$

(a) Tenga solución única.

(b) Tenga infinitas soluciones.

(c) No tenga solución.

Solución:

Escribimos el sistema en forma aumentada para aplicar reducción Gaussiana.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & a+5 & 10 & a+12 \\ -1 & -2 & a-5 & a-6 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a-1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \end{array}\right]$$

De aquí podemos observar que para seguir reduciendo necesitamos que $a \neq 1$ y $a \neq 2$ lo que nos lleva a que el sistema tenga **solución única**.

Por otro lado, si $a = 1$, nos queda:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Observe que para este caso el sistema tiene **infinitas soluciones**.

Si $a = 2$, tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donde, también, se tienen **infinitas soluciones**.

Finalmente tenemos que:

- El sistema tiene solución única si $a \neq 1$ y $a \neq 2$.
- El sistema tiene infinitas soluciones si $a = 1$ o $a = 2$.
- El sistema nunca es inconsistente.

<u>Problema 2:</u> (6 puntos) Sabiendo que $\begin{bmatrix} a & b & c \\ k & m & n \\ x & y & z \end{bmatrix} = AB$, con $|A| = 3$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix}$, calcular

$$\begin{vmatrix} c & 2n & z \\ b & 2m & y \\ a+b & 2k+2m & x+y \end{vmatrix}$$

Solución:

Haremos operaciones sobre la matriz y veremos que sucede con su determinante:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} c & 2n & z \\ b & 2m & y \\ a+b & 2k+2m & x+y \end{vmatrix} &= && \text{(Aplicamos operaciones elementales por filas: } F_3 \to F_3 - F_2\text{)} \\
&= \begin{vmatrix} c & 2n & z \\ b & 2m & y \\ a & 2k & x \end{vmatrix} = && \text{(Columna multiplicada por escalar.)} \\
&= 2\begin{vmatrix} c & n & z \\ b & m & y \\ a & k & x \end{vmatrix} = && (F_3 \leftrightarrow F_1) \\
&= -2\begin{vmatrix} a & k & x \\ b & m & y \\ c & n & z \end{vmatrix} = && \text{(Aplicamos trasposición. El Determinante no cambia.)}
\end{aligned}$$

$$= -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ k & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2\,|AB| = -2\,|A|\,|B|$$

Nos falta conocer cuánto vale $|B|$, sin embargo, note que B es una matriz triangular, por lo tanto su determinante es el producto de los elementos de la diagonal, luego $|B| = (-1)(2)(-1) = 2$.

Finalmente:

$$\begin{vmatrix} c & 2n & z \\ b & 2m & y \\ a+b & 2k+2m & x+y \end{vmatrix} = -2(3)(2) = -12$$

<u>Problema 3:</u> (6 puntos) Hallar la inversa de la matriz $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$, donde $\theta \in \mathbb{R}$.

Solución:

Primero veamos si la matriz es invertible. Calculamos su determinante:

$$|Q| = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix} = (1)(1)^{2+2}\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \overbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}^{\text{Identidad trigonométrica}} = 1$$

Efectivamente, Q es invertible ya que su determinante es distinto de cero, por lo tanto, por *Teorema*, su inversa está dada por:

$$Q^{-1} = \frac{1}{\text{detQ}} AdjQ$$

Calculamos la adjunta, para ello, encontramos los cofactores de Q.

$$\begin{array}{lll} A_{11} = \cos\theta & A_{12} = 0 & A_{13} = -\sin\theta \\ A_{21} = 0 & A_{22} = 1 & A_{23} = 0 \\ A_{31} = \sin\theta & A_{32} = 0 & A_{33} = \cos\theta \end{array}$$

La matriz adjunta de Q está dada por la matriz de cofactores de Q, C, traspuesta.

$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \Longrightarrow AdjQ = C^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$Q^{-1} = \frac{1}{\text{detQ}} AdjQ = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

<u>Problema 4:</u> (2 puntos c/u) Responda **VERDADERO** o **FALSO** las siguientes proposiciones.

(a) Sea A una matriz cuadrada de orden n, antisimétrica, tal que n es impar, entonces $|A| = 0$.

(b) Sean A y B matrices cuadradas de orden n, tales que conmutan, entonces

$$(I - 2B)A = (I - 2A)B.$$

(c) Sean A y B matrices, tales que AB es una matriz cuadrada de orden n, entonces

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Solución:

Parte (a).

Si A es una matriz antisimétrica, entonces, esta cumple con que:

$$A^t = -A$$

Aplicando determinantes a ambos miembros de la ecuación:

$$\left|A^t\right| = |-A|$$

Se sabe que el determinante de la traspuesta de una matriz es igual al determinante de la matriz sin trasponer. Por otro lado, si A es cuadrada de orden n y c es un escalar, entonces se cumple que $\det(\text{cQ}) = c^n \text{detQ}$.

$$\begin{aligned} \left|A^t\right| &= |-A| \\ |A| &= (-1)^n |A| \\ |A| &= -1\,|A| && ((-1)^n = -1, \text{ si } n \text{ impar}) \\ |A| + |A| &= 0 \\ |A| &= 0 \end{aligned}$$

En efecto, se cumple que si A es antisimétrica de orden n, con n impar, $|A| = 0$.

Luego la afirmación es **VERDADERA**.

Parte b.

Desarrollamos con las condiciones que nos plantea el problema:

$$\begin{aligned}
(I-2B)A &= (I-2A)B \\
A-2BA &= B-2AB \\
A-2AB &= B-2AB.A \qquad\qquad = B \qquad\qquad (A \text{ y } B \text{ conmutan})
\end{aligned}$$

Parece como si hubiésemos llegado a un hecho verdadero, pero en ningún lugar del problema nos dicen que A y B son iguales, más aún, para que A y B conmuten, estas no necesariamente deben ser iguales.

Luego la afirmación es **FALSA**.

Parte c.

A simple vista esta parece una de la propiedades de las matrices invertibles, sin embargo, note que nos dicen que el producto AB da por resultado una matriz cuadrada de orden n, para ello debe suceder que: A sea una matriz de orden $n \times p$ y B una matriz de orden $p \times n$. Inmediatamente después de esta observación se tiene que la igualdad obtenida es absurda pues no existen determinantes de matrices que no sean cuadradas. Luego la afirmación es **FALSA**.

Nota: La propiedad que usted conoce es la siguiente:

Sean A y B dos matrices invertibles de orden $n \times n$. Entonces AB es invertible y se cumple:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Observe la diferencia.

Nota: Este parcial fue resuelto y digitalizado por Miguel Ángel Labrador para GUIAS USB.

Miguel Ángel
12-10423
Ingeniería Electrónica
@miguelangel2801

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección miguelangel2801@gmail.com