UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS I (MA-1111)
Trimestre ABR-JUL 2016

Elaborado por
Miguel Labrador
12-10423
Ing. Electrónica

Respuestas SEGUNDO PARCIAL HORARIO 3-4.

Pregunta 1. (5 puntos.) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+4x}}{6x-7}$ (**Variante realizado en prepa**).

Solución:

Haciendo una breve inspección, el límite arroja una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Manipulamos la expresión, sacando factor común los términos de mayor grado, para levantar la indeterminación y usar que $\dfrac{k}{\pm\infty} \longrightarrow 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+4x}}{6x-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(2+\frac{4}{x})}}{x(6-\frac{7}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{(2+\frac{4}{x})}}{x(6-\frac{7}{x})}$$

Como $x \longrightarrow -\infty$ y además, por **definición de valor absoluto**, sabemos que $|x| = -x$ siempre que $x \leq 0$. Escribimos el límite así:

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{(2+\frac{4}{x})}}{x(6-\frac{7}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{(2+\frac{4}{x})}}{x(6-\frac{7}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{(2+\frac{4}{x})}}{(6-\frac{7}{x})}$$

Desde aquí solo debemos evaluar el límite. Note que para este caso $\dfrac{4}{-\infty} \longrightarrow 0$ y $\dfrac{7}{-\infty} \longrightarrow 0$ por lo que:

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{(2+\frac{4}{x})}}{(6-\frac{7}{x})} = \frac{-\sqrt{(2+0)}}{(6-0)} = \frac{-\sqrt{2}}{6}$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+4x}}{6x-7}=\frac{-\sqrt{2}}{6}$$

Pregunta 2. (5 puntos.) Calcule $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$

Solución:

Al evaluar obtenemos una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

Como el límite parece prestarse para aplicar el Límite Notable debemos manipular las expresiones para ver si es posible utilizarlo.

Planteamos el siguiente **cambio de variable** : $x = t+1$, $x \longrightarrow 1 \Longleftrightarrow t \longrightarrow 0$

¿POR QUÉ ESTE CAMBIO?

Dese cuenta que cuando $x \longrightarrow 1$ entonces $t \longrightarrow 0$ de otra forma no se cumpliría la igualdad del cambio, además la nueva variable t tiende a cero. Recordemos que en el Límite Notable la variable tiende a cero.

Sustituimos el cambio y tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}&=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi(t+1))}{\sin(3\pi(t+1))}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t)\cos(\pi)+\sin(\pi)\cos(\pi t)}{\sin(3\pi t)\cos(3\pi)+\sin(3\pi)\cos(3\pi t)}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t)(-1)+(0)\cos(\pi t)}{\sin(3\pi t)(-1)+(0)\cos(3\pi t)}\\&=\lim_{t\to0}\frac{-\sin(\pi t)}{-\sin(3\pi t)}\end{aligned}$$

Ahora si tenemos las condiciones para usar el notable, ya que cuanto $t \longrightarrow 0$ lo de adentro del límite también, solo necesitamos hacer aparecer el denominador que debe ser igual a lo de dentro del límite.

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t)}{\sin(3\pi t)}=\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{\sin(\pi t)}{3\pi t}}{\dfrac{\sin(3\pi t)}{3\pi t}}=$$

Por propiedades de los límites:

$$=\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{\sin(\pi t)}{3\pi t}}{\dfrac{\sin(3\pi t)}{3\pi t}}=\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)}{\dfrac{\sin(3\pi t)}{3\pi t}}=\frac{\dfrac{1}{3}\left(\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)}{\left(\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin(3\pi t)}{3\pi t}\right)}$$

Con estas condiciones aplicamos el Límite Notable y nos queda:

$$\frac{\dfrac{1}{3}\left(\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)}{\left(\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(3\pi t)}{3\pi t}\right)}=\frac{\frac{1}{3}(1)}{1}=\frac{1}{3}$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}=\frac{1}{3}$$

Pregunta 3. (5 puntos.) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{9x+1}{x}}-3\right)$ (**Variante del realizado en prepa.**)

Solución:

Por inspección rápida esta es una indeterminación del tipo $0.\infty$.

El trabajo aquí consiste en llevar la función en el límite a una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ y levantarla como hemos hecho con otros límites cuando x tiende a infinito.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{9x+1}{x}}-3\right) &= \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{9x+1}{x}}-3\right)\left(\frac{\sqrt{\frac{9x+1}{x}}+3}{\sqrt{\frac{9x+1}{x}}+3}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\left(\sqrt{\frac{9x+1}{x}}\right)^2-3^2\right)}{\sqrt{\frac{9x+1}{x}}+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{9x+1}{x}-9\right)}{\sqrt{\frac{9x+1}{x}}+3}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{9x+1-9x}{\sqrt{\frac{9x+1}{x}}+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{9x+1}{x}}+3}\end{aligned}$$

Note que desde aquí no es posible que nos quede infinito arriba por lo que hemos levantado la indeterminación. Por otro lado el denominador tiende a seis, como se ilustra a continuación.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{9x+1}{x}}+3}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3}=\frac{1}{\sqrt{9+0}+3}=\frac{1}{6}$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{9x+1}{x}}-3\right)=\frac{1}{6}$$

Pregunta 4. (5 puntos.) Calcule $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$.

(**Variante del ejercicio 53 de la Guía de Mike.**)

Solución:

Tenemos una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

Como es sabido ya para este tipo de ejercicios donde aparecen raíces, lo mejor es aplicar conjugadas siempre que no estemos introduciendo más indeterminaciones. En este caso aplicaremos conjugada para el numerador y el denominador, si no lo hacemos así nos quedará la indeterminación igual.

Por comodidad definimos primero la función:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$$

Manipularemos esta expresión hasta saber que ya la podemos evaluar y nos dará algún resultado consistente.

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}\\
&=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}.\underbrace{\left(\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}\right)}_{\text{Conj.numerador}}\underbrace{\left(\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}\right)}_{\text{conj.denominador}}\\
&=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}\right)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}\right)}\left(\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}\right)\\
&=\left(\frac{x+2-(3x-2)}{4x+1-(5x-1)}\right)\left(\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}\right)\\
&=\left(\frac{-2x+4}{-x+2}\right)\left(\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}\right)\\
&=\left(\frac{2(-x+2)}{-x+2}\right)\left(\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}\right)\\
&=2\left(\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}\right)
\end{aligned}$$

En este punto ya podemos evaluar el límite ya que hemos eliminado lo que nos generaba el cero (el $-x+2$).

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2\left(\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}\right)\\
\Longrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2} 2\left(\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{9}+\sqrt{9}}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}\right) = 3
\end{aligned}
$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}} = 3$$

Pregunta 5. (3 puntos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right)$

Solución:

Tenemos una indeterminación del tipo $\infty-\infty$ (Note que si en la función del límite se tuviera un $+$ en lugar de $-$ no hay indeterminación porque queda $-\infty-\infty$ y eso es directamente $-\infty$).

Debemos levantar la indeterminación. Como sabemos debemos llevar esto a una sola fracción y obtener una ind. del tipo $\dfrac{0}{0}$ y cancelar aquellos factores que nos generen ceros arriba y abajo.

Definimos $f(x) = \dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-4}$

$$f(x) = \frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4} = \frac{x^2-4-3x+6}{(x-2)(x^2-4)} = \frac{x^2-3x+2}{(x-2)(x^2-4)} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x^2-4)} = \frac{x-1}{x^2-4}$$

Hemos eliminado la indeterminación, ya podemos evaluar.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x-1}{x^2-4}\\
\Longrightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-}\frac{\overset{\to 1^-}{x-1}}{\underset{\to 0^-}{x^2-4}} = -\infty
\end{aligned}
$$

Observe que como $x\to 2^-$ el denominador tiende a 0^- luego $\frac{1}{0^-}\to-\infty$. Recuerde que 0^- simboliza a un número negativo muy cercano a cero.

Finalmente:

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right) = -\infty$$

Pregunta 6. (6 puntos.) Demuestre, haciendo uso de la definición de límite, que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

Solución:

Por la forma de la función en el límite ya sabemos que debemos acotar, sin embargo por ser una función racional cada vez que el denominador se acerque a cero habrá conflicto pues el límite de la función no existirá por lo tanto al momento de acotar debemos saber a cuánto debe ser menor δ para garantizar que no pasaremos por $x = -2$ que es donde se anula el denominador.

De la definición de límite tenemos que si el limite existe y tiene el valor dado entonces se está cumpliendo que:

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que

$$|x-2| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{x-1}{x+2} - \frac{1}{4}\right| < \epsilon$$

Manipulamos la expresión de la derecha para hacer que se parezca a la de la izquierda y poder establecer una relación con ϵ.

$$\left|\frac{x-1}{x+2} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{3x-6}{4(x+2)} - \frac{1}{4}\right| = \frac{3}{4}\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = \frac{3}{4}\frac{|x-2|}{|x+2|} < \epsilon$$

Debemos acotar el factor $\dfrac{1}{(x+2)}$, para ello partimos desde acá:

$$|x-2| < \delta < \delta_{max}$$

Por lo general se usa que $\delta < 1$ sin embargo es irresponsable usar este valor sin saber porqué. Desarrollemos la desigualdad planteada:

$$\begin{aligned} &|x-2| < \delta < \delta_{max} \\ \Longleftrightarrow\ &|x-2| < \delta_{max} \\ \Longleftrightarrow\ &2 - \delta_{max} < x < 2 + \delta_{max} \end{aligned}$$

Como x no se puede acercar a $x = -2$ pues este punto no está en el dominio de la función del límite nosotros debemos garantizar un de δ_{max} que satisfaga esto.

Inspeccionando la última desigualdad se puede observar que $\delta_{max} \in (0, 4)$ luego podemos escoger δ_{max} igual a cualquier valor dentro de este conjunto y garantizar que $x \neq -2$.

En este caso si podemos escoger $\delta < 1$ pues $1 \in (0, 4)$ sin embargo proponemos hacer $\delta < \delta_{max} = 3$.

Si $\delta_{max} = 3$ entonces:

$$\begin{aligned} 2-\delta_{max} < x < 2+\delta_{max} \\ \Longleftrightarrow -1 < x < 5 \\ \Longleftrightarrow -1+2 < x+2 < 5+2 \\ \Longleftrightarrow 1 < x+2 < 7 \end{aligned}$$

Como estamos en un intervalo de valores positivos $x+2 = |x+2|$, por lo tanto

$$1 < x+2 < 7 \Longleftrightarrow 1 < |x+2| < 7 \Longleftrightarrow 1 > \frac{1}{|x+2|} > \frac{1}{7} \Longrightarrow \frac{1}{|x+2|} < 1$$

Hemos acotado el factor que estorbaba de aquí podemos escribir lo siguiente:

$$\frac{1}{|x+2|} < 1 \quad \Longleftrightarrow \frac{3}{4}\frac{|x-2|}{|x+2|} < \frac{3}{4}|x-2| < \frac{3}{4}\delta$$

Entonces la expresión $\frac{3}{4}\frac{|x-2|}{|x+2|} < \begin{cases} \frac{3}{4}\delta \\ \epsilon \end{cases}$

Haremos $\epsilon = \frac{3}{4}\delta$.

Luego escogemos, para hacer la demostración, que $\delta = \text{mín}\,(3, \frac{4}{3}\epsilon)$.

Demostración formal:

$\forall\epsilon > 0$ escogemos $\delta = \text{mín}\{3, \frac{4}{3}\epsilon\}$ tal que:

$$\begin{aligned} 0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{x-1}{x+2} - \frac{1}{4}\right| = \frac{3}{4}\frac{|x-2|}{|x+2|} < \frac{3}{4}\,|x-2| < \frac{3}{4}\delta = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\epsilon\right) = \epsilon \\ \Longrightarrow \left|\frac{x-1}{x+2} - \frac{1}{4}\right| < \epsilon \end{aligned}$$

Queda demostrado que límite existe y vale $\frac{1}{4}$.

Pregunta 7. (6 puntos.) Determine los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$. (**Variante del realizado en prepa**.)

Solución:

Ya que a y b son constantes note que, para los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$, f es continua ya que en estos intervalos está definida polinómicamente. Sabemos por teorema que todo polinomio en $\mathbb{R}$ es continuo. Solo estudiamos la función en los puntos de interés que son $x = 0$ y $x = 1$ donde la función cambia su comportamiento.

Para el punto $x = 0$:

Verificamos las tres condiciones de continuidad y de allí vemos que valores pueden tener a y b.

1. $f(0) = (0)^2 + a(0) + b = b$

2. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

   Estudiamos los limites laterales en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + ax + b = b \end{cases}$$

   Luego para que f sea continua en $x = 0$ se debe cumplir que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

   Osea que $b = 0$, con lo cual se cumple también la tercera condición de continuidad:

3. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = b$

Ya tenemos b, es de esperar que si estudiamos continuidad en el otro punto obtengamos a.

Para el punto $x = 1$:

1. $f(1) = (1)^2 + a(1) + b = 1 + a + b$

2. $\lim_{x \to 1} f(x)$

   Estudiamos los límites laterales en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} = x^2 + ax + b = a + b + 1 \\ \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 - x = 1 \end{cases}$$

   Luego para que f sea continua en $x = 1$ se debe cumplir que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$
$$\Longrightarrow a + b + 1 = 1$$

   Además con el dato de la parte anterior tenemos un sistema de ecuaciones así:

$$\begin{cases} b = 0 \\ a + b + 1 = 1 \end{cases}$$

   de aquí se saca que $b = 0$ y $a = 0$ con lo cual se cumple también la tercera condición de continuidad para este punto.

3. $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

   Finalmente f será continua en $\mathbb{R}$ siempre que $a = 0$ y $b = 0$.

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección miguelangel2801@gmail.com

Miguel Labrador
Carnet: 12-10423
Ingeniería Electrónica
Twitter: @MiguelAngel2801