Universidad Simón Bolívar
Matemáticas I (MA-1111)
Segundo Examen Parcial

Elaborado por: Miguel Ángel Labrador
Ingeniería Electrónica
Carnet: 12-10423
Correo: miguelangel2801@gmail.com
Twitter: @miguelangel2801

PREPARADURÍA Nº 8

Matemáticas I (MA-1111)

Derivadas (Segunda parte)

Recta Tangente, Derivación implícita, Derivada de la función inversa, Velocidad Instantánea.

Ejemplo 1: Calcule la ecuación de la recta tangente a

$$f(x) = x + \cos(x)$$

que pasa por el punto $(0, 1)$.

Solución:

Como ya es sabido la derivada de una función en algún punto representa la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

Anteriormente habíamos hecho un ejercicio de Recta Tangente a una curva en un punto $x = c$ y al final dijimos que la pendiente de la recta tangente en este punto estaba dada por el límite:

$$m_{tan} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \qquad \text{(Derivada de } f \text{ evaluada en } x = c.\text{)}$$

Acá no haremos todo el procedimiento para deducir el límite, de ahora en adelante ya sabemos que ***La derivada de una función en un punto representa a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto***.

En los ejercicios de recta tangente como este siempre debemos partir verificando si el punto pertenece a la función.

Si el punto $(0, 1)$ pertenece a la gráfica de f se debe satisfacer que $f(x = 0) = 1$.

$$f(0) = 0 + \cos(0) = 1 \qquad \text{(El punto sí pertenece a la gráfica.)}$$

Como el punto pertenece a la gráfica, este será el punto de tangencia.

Para construir la recta que queremos necesitamos la pendiente y un punto. Ya tenemos el punto y *la pendiente no es más que la derivada de la función evaluada en* $x = 0$.

Derivamos $f(x)$

$$f'(x) = (x + \cos(x))' = 1 - \sin(x)$$

Ahora evaluamos la derivada en $x = 0$

$$f'(x = 0) = 1 - \sin(0) = 1 \qquad \text{(Valor de la pendiente m.)}$$

Luego la pendiente de la recta que pasa por $(0, 1)$ y es tangente a la gráfica de f vale $m = 1$.

La ecuación de la recta tangente está dada por:

$$\begin{aligned} y - y_o &= m(x - x_o) && \text{(Punto-pendiente.)} \\ y - 1 &= 1(x - 0) \\ y - 1 &= x \\ y &= x - 1 && \text{(Recta tangente a } f \text{ en el punto } (0,1).) \end{aligned}$$

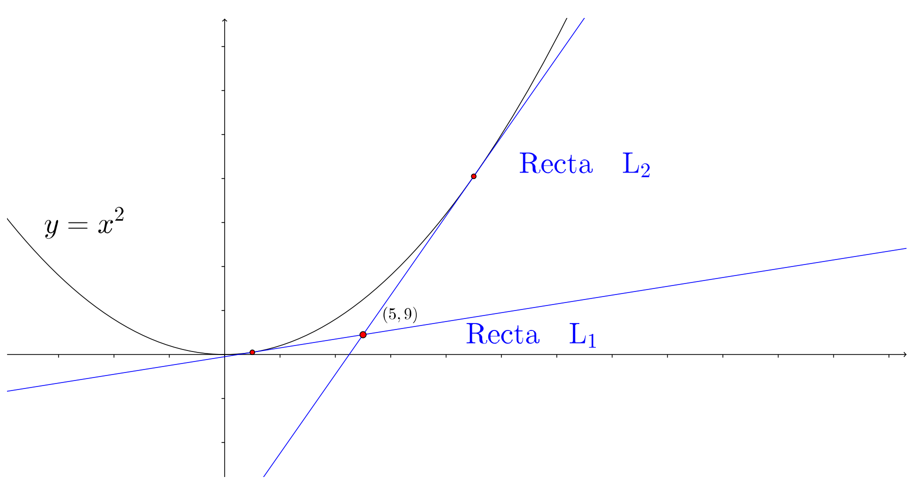
Ejemplo 2: Halle las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(5, 9)$ y son tangentes al gráfico de $y = x^2$.

Solución:

Verifiquemos si el punto pertenece a la gráfica de $y = x^2$.

$$9 \neq 5^2 \qquad \text{(No pertenece a la gráfica.)}$$

Como el punto $(5, 9)$ es externo al gráfico de f entonces no puede ser el punto de tangencia y nuestro proceder para responder la pregunta será distinto que en la respuesta anterior, la razón se se observa en el siguiente bosquejo.



Puede haber más de una recta tangente a $y = x^2$ y que pasen por $(5, 9)$ ya que el punto no está sobre la gráfica.

Para hallar la pendiente de las rectas L_1 y L_2, que llamaremos m_1 y m_2 respectivamente, supongamos que el punto $(x_o, y_o) = (x_o, f(x_o))$ es el punto de tangencia de una de la rectas, L_1 por ejemplo, por lo tanto se debe cumplir:

$$m_1 = \frac{f(x_o) - 9}{x_o - 5}$$

Además la pendiente m_1 también es la derivada de $f(x)$ evaluada en $x = x_o$ (Es erróneo pensar que la pendiente es la derivada evaluada en $x = 5$ puesto que el punto $(5, 9)$ no es el punto de tangencia ya que no pertenece a la gráfica), es decir:

$$m_1 = f'(x_o)$$

De modo que ahora tenemos la siguiente relación:

$$\frac{f(x_o) - 9}{x_o - 5} = f'(x_o) \tag{1}$$

Si logramos despejar x_o de la ecuación (1) obtendremos el valor de la coordenada x_o del punto de tangencia .

Calculemos $f'(x_o)$:

$$f'(x) = 2x \Longrightarrow f'(x_o) = 2x_o$$

Reemplazando $f'(x_o) = 2x_o$ en (1):

$$\frac{f(x_o) - 9}{x_o - 5} = f'(x_o) \Longrightarrow \frac{f(x_o) - 9}{x_o - 5} = 2x_o$$

Además $f(x) = x^2 \Longrightarrow f(x_o) = x_o^2$:

$$\frac{f(x_o) - 9}{x_o - 5} = 2x_o \Longrightarrow \frac{x_o^2 - 9}{x_o - 5} = 2x_o$$

Lo que queda es despejar x_o:

$$\begin{aligned} \frac{x_o^2 - 9}{x_o - 5} &= 2x_o \\ x_o^2 - 9 &= 2x_o^2 - 10x_o \\ x_o^2 - 10x_o + 9 &= 0 \\ (x_o - 1)(x_o - 9) &= 0 \Longrightarrow x_o = 1 \quad ó \quad x_o = 9 \end{aligned}$$

Hemos obtenido dos posibles valores para x_o, esto se debe a que hemos obtenido las coordenadas x_o del punto de tangencia tanto para L_1 y L_2, de manera que los puntos de tangencia tanto para L_1 y L_2 son, respectivamente:

$$(x_o, f(x_o)) = (1, f(1)) = (1, 1) \qquad (x_o, f(x_o)) = (9, f(9)) = (9, 81)$$

Esta información es suficiente para calcular las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2.

Para $\mathbf{L_1}$.

La pendiente de L_1, como ya habíamos dicho, está dada por:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{f(x_o) - 9}{x_o - 5} && \text{(Con } (x_o, f(x_o)) = (1, 1)) \\ \Longrightarrow m_1 &= \frac{1-9}{1-5} = \frac{-8}{-4} = 2 \end{aligned}$$

Ya tenemos la pendiente $m_1 = 2$ y dos puntos por donde pasa la recta: $(1, 1)$ y $(5, 9)$, escogemos el $(1, 1)$. La ecuación de la recta está dada por:

$$\begin{aligned} y - y_a &= m(x - x_a) \\ \Longrightarrow y - 1 &= 2(x - 1) \\ \Longrightarrow \mathbf{y} &= \mathbf{2x - 1} && \text{(Ecuación de la recta } L_1.) \end{aligned}$$

Para $\mathbf{L_2}$.

La pendiente de L_2 está dada por:

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{f(x_o) - 9}{x_o - 5} && \text{(Con } (x_o, f(x_o)) = (9, 81)) \\ \Longrightarrow m_1 &= \frac{81-9}{9-5} = \frac{72}{4} = 18 \end{aligned}$$

Con la pendiente $m_2 = 18$ y el punto $(5, 9)$ podemos construir la ecuación de la recta L_2.

$$\begin{aligned} y - y_a &= m(x - x_a) \\ \Longrightarrow y - 9 &= 18(x - 5) \\ \Longrightarrow \mathbf{y} &= \mathbf{18x - 81} && \text{(Ecuación de la recta } L_2.) \end{aligned}$$

Finalmente las rectas tangentes a $y = x^2$ que pasan por el punto $(5, 9)$ están dadas por las ecuaciones:

$$\mathbf{y = 2x - 1} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{y = 18x - 81}$$

Ejemplo 3: Encuentre los valores de x para los cuales la función $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ posee una recta tangente paralela a la recta $y = \sqrt{2}x - 5$.

Solución:

Debemos encontrar las coordenadas x donde se que cumple que la pendiente de una recta tangente a f en esas coordenadas es igual a $\sqrt{2}$, es decir, hallar x donde se cumple que:

$$f'(x) = \sqrt{2}$$

Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Esta es la derivada de de $f(x)$ válida únicamente para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ puesto que f no es derivable en $[-1, 1]$, cosa que usted debe saber.

De modo que debemos despejar x de la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} &= \sqrt{2} && (1) \\ \frac{x^2}{x^2-1} &= 2 \\ x^2 &= 2x^2 - 2 \\ x^2 - 2 = 0 &\Longrightarrow x_1 = \sqrt{2} \quad ó \quad x_2 = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Note que tanto x_1 y x_2 están en el dominio de la derivada, sin embargo $x_2 = -\sqrt{2}$ no es una solución válida. Observe que x_2 no satisface la ecuación (1):

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{2} &\Longrightarrow \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}} = \sqrt{2} \\ &\Longrightarrow \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1}} = \sqrt{2} \\ &\Longrightarrow -\sqrt{2} = \sqrt{2} && \text{(Esto es FALSO.)} \end{aligned}$$

La razón de esta incongruencia es que al elevar al cuadrado la ecuación (1) una para despejar estamos agregando soluciones a la ecuación original, además note que la ecuación (1) solo admite soluciones positivas ya que el denominador es siempre positivo.

Finalmente, el único valor donde existe una recta tangente a la gráfica de f y es paralela a la recta $y = \sqrt{2}x - 5$ es en $\mathbf{x = \sqrt{2}}$.

Ejemplo 4: Suponiendo que y es función de x, definida implícitamente por la ecuación $x + \sqrt{xy} + y = 1$, halle $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Solución:

Como de entrada nos dicen que y es una función de x, la derivada de y respecto a x NO es cero y la denotaremos como y', que escrito en la notación de Leibniz es $y' = \dfrac{dy}{dx}$, así mismo $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Primero debemos hallar y', para ello derivamos ambos lados de la ecuación que nos dan.

$$
\begin{aligned}
x + \sqrt{xy} + y &= 1 \\
\Longrightarrow (x + \sqrt{xy} + y)' &= (1)' \\
\Longrightarrow 1 + \frac{1}{2\sqrt{xy}}(xy)' + y' &= 0 \\
\Longrightarrow 1 + \frac{1}{2\sqrt{xy}}(y + xy') + y' &= 0 \\
\Longrightarrow 1 + \frac{y}{2\sqrt{xy}} + \frac{xy'}{2\sqrt{xy}} + y' &= 0 \\
\Longrightarrow \frac{xy'}{2\sqrt{xy}} + y'6 &= -1 - \frac{y}{2\sqrt{xy}} \\
\Longrightarrow y'\left(\frac{x}{2\sqrt{xy}} + 1\right) &= -1 - \frac{y}{2\sqrt{xy}} \\
\Longrightarrow y' &= -\frac{1 + \dfrac{y}{2\sqrt{xy}}}{1 + \dfrac{x}{2\sqrt{xy}}} \\
\Longrightarrow y' &= -\frac{2\sqrt{xy} + y}{2\sqrt{xy} + x}
\end{aligned}
$$

Para hallar y'' derivamos la expresión que hemos encontrado para y'.

$$
\begin{aligned}
y'' &= \left(-\frac{2\sqrt{xy} + y}{2\sqrt{xy} + x}\right)' \\
&= -\frac{\left(2\sqrt{xy} + y\right)'\left(2\sqrt{xy} + x\right) - \left(2\sqrt{xy} + x\right)'\left(2\sqrt{xy} + y\right)}{\left(2\sqrt{xy} + x\right)^2} \\
&= -\frac{\left(\dfrac{(xy)'}{\sqrt{xy}} + y'\right)\left(2\sqrt{xy} + x\right) - \left(\dfrac{(xy)'}{\sqrt{xy}} + 1\right)\left(2\sqrt{xy} + y\right)}{\left(2\sqrt{xy} + x\right)^2}
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{\left(\dfrac{y+xy'}{\sqrt{xy}}+y'\right)\left(2\sqrt{xy}+x\right)-\left(\dfrac{y+xy'}{\sqrt{xy}}+1\right)\left(2\sqrt{xy}+y\right)}{\left(2\sqrt{xy}+x\right)^2}$$

$$= -\frac{\left(2(y+xy')+2y'\sqrt{xy}+\dfrac{x(y+xy')}{\sqrt{xy}}+xy'\right)-\left(2(y+xy')+2\sqrt{xy}+\dfrac{y(y+xy')}{\sqrt{xy}}+y\right)}{\left(2\sqrt{xy}+x\right)^2}$$

$$= -\frac{\left(2y'\sqrt{xy}+\dfrac{x(y+xy')}{\sqrt{xy}}+xy'\right)-\left(2\sqrt{xy}+\dfrac{y(y+xy')}{\sqrt{xy}}+y\right)}{\left(2\sqrt{xy}+x\right)^2}$$

Finalmente:

$$y' = -\frac{2\sqrt{xy}+y}{2\sqrt{xy}+x} \qquad y \qquad y'' = -\frac{\left(2y'\sqrt{xy}+\dfrac{x(y+xy')}{\sqrt{xy}}+xy'\right)-\left(2\sqrt{xy}+\dfrac{y(y+xy')}{\sqrt{xy}}+y\right)}{\left(2\sqrt{xy}+x\right)^2}$$

Ejemplo 5: Halle la(s) recta(s) tangente(s) a la circunferencia de ecuación

$$(x-1)^2+(y+1)^2 = 17$$

en los puntos que tienen abscisa $x = 2$.

Solución:

Aunque parece una problema del primer parcial, esta vez debemos utilizar la herramientas que hemos aprendido durante todo el curso.

Como ya es sabido, para hallar la ecuación de toda recta es necesario tener su pendiente y un punto sobre dicha recta. Utilizaremos derivación implícita sobre la ecuación suponiendo que $y(x)$, es decir, que y es una función de x.

$$(x-1)^2+(y+1)^2 = 17$$

$$\Longrightarrow 2(x-1)+2(y(x)+1)y'(x) = 0 \qquad \text{(Derivamos ambos miembros)}$$

$$\Longrightarrow y'(x) = -\frac{(x-1)}{y(x)+1}$$

Como ya sabemos, $y'(x)$ es la pendiente de la recta tangente a y en todo x contenido en su dominio. Como nos piden la(s) rectas tangente(s) a y en la abscisa $x = 2$ debemos evaluar:

$$y'(x=2) = -\frac{(2-1)}{y(2)+1} = -\frac{1}{y(2)+1}$$

Aun debemos calcular cuánto vale $y(2)$. La derivación implícita se utiliza cuando no es posible despejar $y(x)$, aunque en este caso sí es posible no lo vamos a hacer puesto que no es necesario. Fíjese como se puede hallar $y(2)$.

De la ecuación que nos dan:

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y+1)^2=17 &\Longrightarrow ((2)-1)^2+(y(2)+1)^2=17\\ &\Longrightarrow 1+(y(2)+1)^2=17\\ &\Longrightarrow (y(2)+1)^2=16\\ &\Longrightarrow y(2)+1=4 \quad ó \quad y(2)+1=-4\\ &\Longrightarrow y(2)=3 \quad ó \quad y(2)=-5\end{aligned}$$

Es de esperarse que y tenga dos imágenes para $x=2$ pues estamos trabajando con una circunferencia. Recuerde que una función no puede tener dos imágenes distintas para el mismo elemento del dominio. Una circunferencia no es una función.

Ahora bien, como tenemos dos valores al evaluar $y(2)$ también tendremos dos valores para $y(2)$, luego tendremos dos pendientes y por lo tanto dos rectas cuyas ecuaciones debemos calcular.

Si $\mathbf{y(2)=3}$:

$$y'(2)=-\frac{1}{y(2)+1}=-\frac{1}{3+1}=-\frac{1}{4}=m_1 \qquad \text{(Pendiente de la recta } L_1.\text{)}$$

Como la recta L_1 es tangente a y en $x=2$, el punto de tangencia está dado por $(2,y(2))=(2,3)$.

La ecuación que define a L_1 está dada por:

$$\begin{aligned}y-y_o&=m_1(x-x_o)\\ y-3&=-\frac{1}{4}(x-2)\\ \mathbf{y}&=-\mathbf{\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}}\end{aligned}$$

Si $\mathbf{y(2)=-5}$:

$$y'(2)=-\frac{1}{y(2)+1}=-\frac{1}{-5+1}=\frac{1}{4}=m_2 \qquad \text{(Pendiente de la recta } L_2.\text{)}$$

El punto de tangencia está dado por $(2,y(2))=(2,-5)$.

La ecuación que define a L_2 está dada por:

$$\begin{aligned} y - y_o &= m_2(x - x_o) \\ y + 5 &= \frac{1}{4}(x-2) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{\frac{1}{4}x - \frac{11}{2}} \end{aligned}$$

Ejemplo 6: Hallar en el punto $x = 0$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y(x)$ definida implícitamente por:

$$\cos(x)\arctan(xy) + x\,\mathrm{sen}(y^2) = x^2 + y + 1$$

Solución:

De la misma forma que en ejemplo anterior debemos hallar una recta tangente a una curva definida implícitamente.

Primero calculamos la pendiente de la recta que nos piden. Derivamos implícitamente ambos miembros para obtener y'.

$$\begin{aligned} &\cos(x)\arctan(xy) + x\,\mathrm{sen}(y^2) = x^2 + y + 1 \\ \Longrightarrow\ &(\cos(x))'\arctan(xy) + (\arctan(xy))'\cos(x) + (x\sin(y^2))' = 2x + y'(x) \\ \Longrightarrow\ &-\sin(x)\arctan(xy) + \frac{(y + xy'(x))\cos(x)}{1+(xy)^2} + \sin(y^2) + x\cos(y^2)2y.y'(x) = 2x + y'(x) \end{aligned}$$

No se preocupe en despejar $y'(x)$ pues en realidad lo que nos interesa es la pendiente en la abscisa $x = 0$ por lo que debemos evaluar $y'(0)$.

$$-\sin(x)\arctan(xy) + \frac{(y + xy'(x))\cos(x)}{1+(xy)^2} + \sin(y^2) + x\cos(y^2)2y.y'(x) = 2x + y'(x)$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow -\sin(0)\arctan(0) + \frac{y(0)\cos(0)}{1+0} + \sin(y^2(0)) + 0 = 0 + y'(0) \\ &\Longrightarrow y(0) + \sin(y^2(0)) = y'(0) \end{aligned}$$

Debemos calcular $y(0)$.

$$\cos(x)\arctan(xy) + x\,\mathrm{sen}(y^2) = x^2 + y + 1$$

$$\begin{aligned}\implies \cos(0)\arctan(0) + 0\sin(y^2(0)) &= 0 + y(0) + 1\\ \implies y(0) + 1 &= 0\\ \implies y(0) &= -1\end{aligned}$$

De modo que: $\quad y(0) + \sin(y^2(0)) = y'(0) \implies y'(0) = \sin(1) - 1$

$y'(0)$ es la pendiente de una recta tangente a y en el punto de abscisa $x = 0$, este punto, que es el punto de tangencia, está dado por $(0, y(0)) = (0, -1)$ de forma que ya tenemos lo necesario para construir la ecuación de la recta pedida.

$$\begin{aligned}y - y_o &= m(x - x_o)\\ y + 1 &= (\sin(1) - 1)(x - 0)\\ y &= (\sin(1) - 1)x - 1\end{aligned}$$

Ejemplo 7: Demuestre que $\dfrac{d(tan^{-1}(x))}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Solución:

Para calcular la derivada de la función inversa de la tangente utilizaremos la derivación implícita.

Partimos de la siguiente relación, que, como sabemos, se cumple siempre:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

Ahora, derivamos implícitamente respecto a x ambos miembros de la ecuación:

$$f'\left(f^{-1}(x)\right).\left(f^{-1}(x)\right)' = 1$$

Lo que está en rojo es precisamente lo que queremos conocer: la derivada de alguna función inversa, note que si despejamos obtenemos:

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \tag{I}$$

Hemos obtenido una «fórmula» que usted no debería aprenderse de memoria, asegúrese de entender como se dedujo. *La derivada de una función inversa f^{-1} es igual al inverso de la derivada de la función f compuesta con la función inversa.*

Si aplicamos la relación (I) a nuestro problema:

$$\left(\tan^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\tan'\left(\tan^{-1}(x)\right)}$$

No confunda la notación, fíjese que $\tan'\left(\tan^{-1}(x)\right)$ no es lo mismo que $\left(\tan\left(\tan^{-1}(x)\right)\right)'$.

$\tan'\left(\tan^{-1}(x)\right)$ significa que debemos derivar la tangente y con este resultado hacer la composición con $\tan^{-1}(x)$.

$$\left(\tan^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\tan'\left(\tan^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1}(x))}$$

De la identidad trigonométrica fundamental:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Longrightarrow \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \Longrightarrow \tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

Luego:

$$\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x) \Longrightarrow \sec^2(\tan^{-1}(x)) = 1 + \tan^2(\tan^{-1}(x))$$

Por propiedades de la funciones inversas podemos escribir $\tan^2(\tan^{-1}(x)) = (x)^2 = x^2$.

Por lo tanto :

$$\sec^2(\tan^{-1}(x)) = 1 + \tan^2(\tan^{-1}(x)) \Longrightarrow \sec^2(\tan^{-1}(x)) = 1 + x^2$$

Finalmente:

$$\frac{1}{\sec^2(\tan^{-1}(x))} = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow \left(\tan^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Ejemplo 8: Demuestre que $\dfrac{d(\operatorname{arcsin}^{-1}(x))}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Solución:

Para calcular esta derivada utilizaremos la misma idea del ejemplo anterior.

Aplicando la «fórmula» de la derivada de una función inversa:

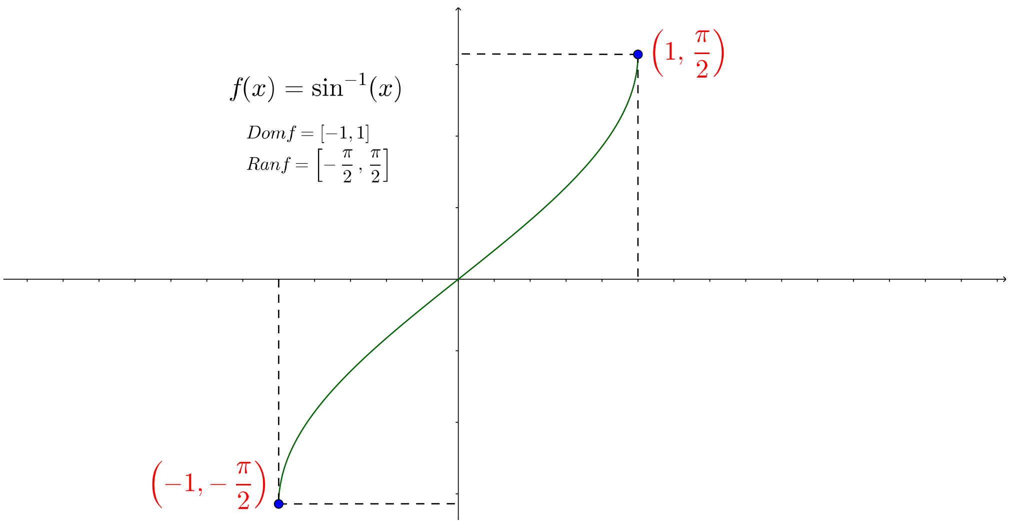
$$\left(\sin^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\sin'\left(\sin^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\cos\left(\sin^{-1}(x)\right)}$$

De la identidad trigonométrica fundamental:

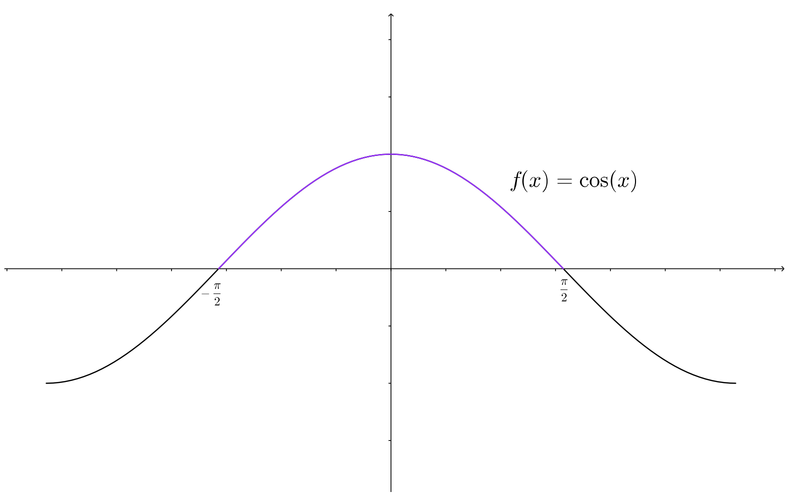
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Longrightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

Sin embargo ahora tenemos el problema de cuál raíz escoger.

Recordemos que la función $\sin^{-1}(x)$ está definida en $[-1,1]$ y alcanza valores en $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, es decir, la función arcoseno «lee» valores en $[-1,1]$ y «arroja» valores en $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, observe esto en la gráfica de la función $f(x)=\sin^{-1}(x)$.



Por otro lado la función $\cos(x)$ es positiva toda vez que «lea» valores pertenecientes al $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, como se ilustra en la gráfica:



Ahora bien, como lo que queremos es $\cos(\sin^{-1}(x))$, el coseno estará leyendo los valores que el arcoseno arroje, es decir, el coseno estará recibiendo valores de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ y por lo tanto será positivo, por esta razón escogeremos la raíz positiva.

Luego:

$$\cos(x)=\sqrt{1-\sin^2(x)}\Longrightarrow\cos(\sin^{-1}(x))=\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}(x))}=\sqrt{1-x^2}$$

Finalmente:

$$\frac{d(\text{arcsin}^{-1}(x))}{dx} = \frac{1}{\cos\left(\sin^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ejemplo 9: Dada la función inyectiva $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$, de la cual se conoce que $f(1) = \sqrt{2}$, $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{3}$, $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ y $f(\sqrt{6}) = \sqrt{6}\sqrt{7}$, calcule $\left(f^{-1}\right)'(\sqrt{6})$.

Solución:

Se pide la derivada de la función inversa de f evaluada en $x = \sqrt{6}$, para ello podemos hallar la función inversa y derivarla lo que representa un gran trabajo. Utilizaremos lo que hemos aprendido de las derivadas de la función inversa.

En primer lugar la función f tiene inversa ya que el enunciado nos dice que es inyectiva, por lo tanto podemos aplicar:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \Longrightarrow \left(f^{-1}\right)'(\sqrt{6}) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(\sqrt{6})\right)}$$

Entonces para poder hallar $\left(f^{-1}\right)'(\sqrt{6})$ debemos calcular la derivada de f y hallar $f^{-1}(\sqrt{6})$, más aún, note que debemos hacer la evaluación f' de $f^{-1}(\sqrt{6})$.

Calculamos f':

$$f'(x) = \left(x\sqrt{x^2+1}\right)' = \sqrt{x^2+1} + x\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Para hallar $f^{-1}(\sqrt{6})$ se podría hallar la función inversa de f y evaluar en $x = \sqrt{6}$ pero ya dijimos al principio que no haríamos este procedimiento. Recuerde la definición de función inversa estudiada para el primer parcial:

Función inversa.

Sea f una función inyectiva con dominio A y rango B. Entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A además está definida por:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$$

para cualquier y en B.

Además del enunciado tenemos que $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ de manera que:

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{6} \Longleftrightarrow f^{-1}(\sqrt{6}) = \sqrt{2}$$

Luego

$$f'\left(f^{-1}(\sqrt{6})\right) = f'\left(\sqrt{2}\right) = \frac{2\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Finalmente

$$\left(f^{-1}\right)'(\sqrt{6}) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(\sqrt{6})\right)} = \frac{1}{\frac{5}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

Ejemplo 10: Sea $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $f(x) = \sqrt{7 + 4\sin^2(x)}$. Halle $\left(f^{-1}\right)'(3)$ sabiendo que el punto $\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$ pertenece al gráfico de f.

Solución:

Utilizaremos la misma idea del ejemplo anterior.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \Longrightarrow \left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(3)\right)}$$

Sin embargo tenemos un problema: ¿ es f inyectiva? Es decir ¿ podremos decir que existe f^{-1}? A diferencia del ejemplo anterior, ahora no nos indican nada y es necesario saberlo para garantizar la veracidad de nuestros resultados.

Vamos a demostrar que f es inyectiva en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Consideremos a y $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Si f es inyectiva, $f(a) = f(b)$ siempre que $a = b$.

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Longrightarrow \sqrt{7 + 4\sin^2(a)} = \sqrt{7 + 4\sin^2(b)} \\ &\Longrightarrow \sin^2(a) = \sin^2(b) \\ &\Longrightarrow |\sin(a)| = |\sin(b)| \end{aligned}$$

Aunque en este punto parece que la función no es inyectiva no hay que olvidar que f está definida en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y por ello hemos pedido al principio que a y b pertenezcan a su dominio. Como la función seno es positiva en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ podemos decir que $|\sin(x)| = \sin(x)$ (ojo, solo porque el enunciado nos dice que está definida en ese intervalo) de manera que:

$$\Longrightarrow |\sin(a)| = |\sin(b)| \Longrightarrow \sin(a) = \sin(b)$$

Nuevamente como a y $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la única forma que el seno de estos «números» sea igual es que los números sean iguales, es decir:

$$\Longrightarrow \sin(a) = \sin(b) \Longrightarrow a = b \qquad \text{(Solo si } a \text{ y } b \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]\text{.)}$$

Luego f es inyectiva y por lo tanto tiene inversa. Esta demostración no debe ser trabajosa ya que seguramente usted practicó lo suficiente para el primer parcial.

Para obtener el valor de $\left(f^{-1}\right)'(3)$ debemos calcular la derivada de f y averiguar cuánto vale $f^{-1}(3)$ para hacer las operaciones planteadas al principio.

Calculamos f':

$$f'(x) = \left(\sqrt{7+4\sin^2(x)}\right)' = \frac{\left(7+4\sin^2(x)\right)'}{2\sqrt{7+4\sin^2(x)}} = \frac{8\sin(x).\cos(x)}{2\sqrt{7+4\sin^2(x)}} = \frac{4\sin(x).\cos(x)}{\sqrt{7+4\sin^2(x)}}$$

Para hallar $f^{-1}(3)$ recurrimos a lo que nos dice el enunciado: el punto $\left(\frac{\pi}{4},3\right)$ pertenece a la gráfica de f, esto quiere decir que :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \Longleftrightarrow f^{-1}(3) = \frac{\pi}{4}$$

Luego:

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(3)\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{7+4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}}} = \frac{1}{\frac{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{7+4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}} = \frac{3}{2}$$

Finalmente:

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 11: Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 16 p/seg. Si la dirección positiva de la distancia desde el punto de partida es hacia arriba, la ecuación del movimiento es:

$$r(t) = -4t^2 + 16t$$

Si t es la cantidad de segundos en el tiempo que ha transcurrido desde que la pelota fue lanzada y r es la cantidad de pies en la distancia de la pelota desde el punto de partida en t seg encontrar:

(a). La velocidad instantánea de la pelota al término de 1 seg.

(b). La velocidad instantánea de la pelota al término de 3 seg.

(c). ¿ Cuántos segundos tarda la pelota en alcanzar su punto más alto?

(d). ¿ A qué altura máxima irá la pelota?

(e). La rapidez de la pelota al término de 1 y 3 seg.

(f). ¿ Cuántos segundos tarda la pelota en llegar al suelo?

Solución:

Definimos la dirección $\hat{x}$ cómo la positiva hacia arriba tal como lo indica el problema, de manera que:

$$\vec{r}(t) = (-4t^2 + 16t)\hat{x} \qquad \text{(Vector posición.)}$$

Se sabe que la la velocidad instantánea está dada por:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

donde $v(\vec{t})$ es la velocidad en función del tiempo y $r(\vec{t})$ es la posición en función del tiempo. De modo que para saber cuánto vale la velocidad para todo tiempo t debemos derivar el vector posición $\vec{r}(t)$.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (-8t + 16)\hat{x} \quad [p/seg]$$

La velocidad de la pelota a $t = 1$ seg está dada por : $\vec{v}$(1 seg)= $8\hat{x}$ p/seg

La velocidad de la pelota a $t = 3$ seg está dada por : $\vec{v}$(3 seg)= $-8\hat{x}$ p/seg

De acá se ve que la velocidad a $t = 1$ seg es positiva y a los $t = 3$ seg es negativa, es decir, a los 1 seg está subiendo y a los 3 seg ya está bajando, de modo que cuando la velocidad es nula la pelota está es su altura máxima.

Para saber en que tiempo t la pelota se encuentra en su punto más alto debemos ver cuándo su velocidad en nula:

$$\vec{v}(t) = 0\hat{x} \Longrightarrow (-8t + 16)\hat{x} = 0\hat{x} \Longrightarrow -8t + 16 = 0 \Longrightarrow t = 2\,seg$$

Luego la pelota llega a su punto más alto a los 2 segundos después de haber sido lanzada.

La altura máxima de la pelota se alcanza cuando su velocidad es nula, es decir, a los 2 segundos, de modo que la altura máxima está dada por:

$$r(2\ seg) = (-4(2)^2 + 16(2))\ p = 16\ p$$

Debe distinguir entre los conceptos de velocidad y rapidez, la velocidad es un vector y la rapidez un escalar. La rapidez no es más el módulo de la velocidad por lo tanto:

La rapidez de la pelota a $t = 1\ seg$ está dada por : $v(1\ seg) = 8\ p/seg$

La rapidez de la pelota a $t = 3\ seg$ está dada por : $v(3\ seg) = 8\ p/seg$

Para saber cuánto tiempo tarde la pelota en llegar nuevamente al suelo debemos pensar en que cuando la pelota está en el suelo la posición es $r(t) = 0\ p$, si embargo esto sucede dos veces: justo antes de lanzarse y justo después de tocar el suelo luego de caer.

$$r(t) = 0\ p \Longrightarrow -4t^2 + 16t = 0\ p \Longrightarrow -4t(t-4) = 0 \ \Longrightarrow t = 0\ seg \quad ó \quad t = 4\ seg$$

A los 0 segundos la pelota está en el piso antes de ser lanzada y a los 4 segundos vuelve a estar en el piso después de caer. Finalmente la pelota tarda 4 segundos para llegar al piso después de ser lanzada.

Bibliografía.

- **Demidovich, B.** (1967). *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*(2a. ed.). Moscú: Editorial Mir.
- **Dennis, G. Zill y Warren, S. Wright.** (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (4a. ed.).México, D. F.: McGraw Hill.
- **Valera, M. T.** *Guías de Ejercicios.* Universidad Simón Bolívar.
- **Guzmán M.A.** (2014). *Guía de Ejercicios de Matemáticas 1 con Soluciones.* Universidad Simón Bolívar.

Este material fue, resuelto y tipeado en LaTeX por Miguel Ángel Labrador para uso de toda la comunidad académica. Algunos ejercicios fueron tomados de parciales realizados en cursos de MA-1111 de la Universidad Simón Bolívar.

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección **miguelangel2801@gmail.com**.

Este material se actualizó por última vez en **diciembre de 2017**.