Universidad Simón Bolívar
Matemáticas I (MA-1111)
Segundo Examen Parcial

Elaborado por: Miguel Ángel Labrador
Ingeniería Electrónica
Carnet: 12-10423
Correo: miguelangel2801@gmail.com
Twitter: @miguelangel2801

PREPARADURÍA Nº 7

Matemáticas I (MA-1111)

Derivadas.

Derivadas por definición, Regla de la Cadena y derivabilidad.

Ejemplo 1: Calcule por definición la derivada de la función $f(x) = \sin(x)$.

Solución:

Para calcular esta derivada debemos utilizar la Definición de Derivada.

Podemos definir la derivada de dos maneras.

Derivada en un punto.

Sea f una función continua en el intervalo abierto I y sea $c \in I$, decimos que la derivada de f en el punto $x = c$ existe siempre que exista

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

O equivalentemente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Es importante remarcar que esta es la derivada de una función **en un punto** por lo tanto, si esta existe, obtendremos un valor. Recuerde que este límite es la **pendiente de la recta tangente** a $f(x)$ en el punto $x = c$.

Si pedimos que c sea cualquier punto perteneciente al dominio de la función podemos definir la derivada de la siguiente forma:

Derivada de una función.

La derivada de una función f es otra función f' cuyo valor para cualquier número x es

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Esta se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a f en cualquier punto x.

Como no nos están pidiendo la derivada en algún punto, debemos derivar f para cualquier punto x por lo que debemos obtener, al final, otra función que represente a la derivada.

Usemos la definición:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \qquad \text{(Ind del tipo } \tfrac{0}{0}.\text{)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) - \sin(x) + \sin(h)\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(x)\left(1 - \cos(h)\right) + \sin(h)\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(x)\left(1 - \cos(h)\right)}{h} + \frac{\sin(h)\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(x)\left(1 - \cos(h)\right)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(x)\left(1 - \cos^2(h)\right)}{h(1+\cos(h))} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(x)\sin^2(h)}{h(1+\cos(h))} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)\cos(x)}{h} \\
&= -\sin(x) \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin(h)}{1+\cos(h)}\right)\left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}\right) + \cos(x)\left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}\right) \\
&= -\sin(x)(0)(1) + \cos(x)(1) \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

Finalmente hemos obtenido que $f'(x) = \cos(x)$. Esta es una derivada de tabla y no será necesario calcularla de esta manera en el futuro.

Ejemplo 2: Demuestre que la derivada de $f(\theta) = \tan(\theta)$ vale $f'(\theta) = \sec^2(\theta)$.

Solución:

Una vez más utilizaremos la definición de derivada para calcular esta que es una derivada de tabla.

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(\theta+h)-f(\theta)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\tan(\theta+h)-\tan(\theta)}{h} && \text{(Ind del tipo } \tfrac{0}{0}.\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\tan(\theta)+\tan(h)}{1-\tan(\theta)\tan(h)} - \tan(\theta)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\tan(\theta)+\tan(h)-\tan(\theta)\left(1-\tan(\theta)\tan(h)\right)}{1-\tan(\theta)\tan(h)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\tan(\theta)+\tan(h)-\tan(\theta)+\tan^2(\theta)\tan(h)}{1-\tan(\theta)\tan(h)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\tan(h)(1+\tan^2(\theta))}{1-\tan(\theta)\tan(h)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\tan(h)\sec^2(\theta)}{1-\tan(\theta)\tan(h)}}{h} && (1+\tan(\theta) = \sec^2(\theta).)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\tan(h)\sec^2(\theta)}{\left(1-\tan(\theta)\tan(h)\right)h}\\
&= \sec^2(\theta)\left(\lim_{h\to 0} \frac{\tan(h)}{\left(1-\tan(\theta)\tan(h)\right)h}\right)\\
&= \sec^2(\theta)\left(\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\sin(h)}{\cos(h)}}{\left(1-\tan(\theta)\tan(h)\right)h}\right)\\
&= \sec^2(\theta)\left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{\left(1-\tan(\theta)\tan(h)\right)h\cos(h)}\right)\\
&= \sec^2(\theta)\left(\lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(1-\tan(\theta)\tan(h)\right)\cos(h)}\right)\left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}\right)\\
&= \sec^2(\theta)(1)(1) = \sec^2(\theta)
\end{aligned}
$$

Finalmente podemos decir que:

$$
f'(\theta) = (\tan(\theta))' = \lim_{h\to 0} \frac{\tan(\theta+h)-\tan(\theta)}{h} = \sec^2(\theta)
$$

Ejemplo 3: Calcule la derivada de la función $f(x) = \cos\left(\dfrac{3x^2}{x+2}\right)$.

Solución:

Anteriormente nos pedían también la derivada de una función pero en este caso no utilizaremos la definición pues es excesivamente complicado, de ahora en adelante, a menos que nos digan lo contrario, derivaremos usando **Derivadas de Tabla** y **Técnicas de Derivación**.

Técnicas de derivación.

Función	Derivada
$k \quad , k \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	$nx^{(n-1)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$kf(x) \quad , k \in \mathbb{R}$	$k\,(f(x))'$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$f(x)-g(x)$	$f'(x)-g'(x)$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

Estas son las derivadas más utilizadas. Observe que existen reglas para calcular las derivadas del producto y cociente, y también de suma y resta de funciones, que no debe confundir ni aplicar instintivamente. No obstante usted debe aprender a derivar sin pararse a pensar que derivada usará en cada paso puesto que de ahora en adelante se utilizaran estas reglas simultáneamente. Usted deberá poder derivar con la misma soltura que suma y multiplica los números.

Falta uno de los teoremas más importantes, la Regla de la Cadena, esto es lo que nos permitirá derivar cualquier función a través de las derivadas de tabla que hemos visto.

Regla de la Cadena.

La derivada de una función compuesta $f\left(g(x)\right)$ es igual a la derivada de la función más externa evaluada en la función interna por la derivada de la función interna.

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right).g'(x)$$

Ahora veamos como aplicamos la regla de la cadena y las derivadas de tabla al ejercicio.

$$f'(x) = \left(\cos\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)\right)'$$

Vea que esta es la composición de dos funciones, $\cos(x)$ con $\frac{3x^2}{x+2}$. Podemos aplicar **La Regla de la Cadena** y nos queda:

$$\begin{aligned}\left(\cos\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)\right)' &= \cos'\left(\frac{3x^2}{x+2}\right).\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)' \\ &= -\sin\left(\frac{3x^2}{x+2}\right).\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)'\end{aligned}$$

Ahora lo que nos queda es ver cuánto vale la derivada de la función interna $\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)'$. La calcularemos aparte y luego regresaremos a sustituirla.

Vea que tenemos que derivar el cociente entre dos funciones por lo que debemos usar **La Regla del Cociente**

$$\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)' = \frac{(3x^2)'(x+2)-(x+2)'(3x^2)}{(x+2)^2}$$

A continuación utilizaremos simultáneamente la **Derivada de una Potencia** y la **Derivada de la Suma**. Obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{(3x^2)'(x+2)-(x+2)'(3x^2)}{(x+2)^2} &= \frac{(6x)(x+2)-(1+0)(3x^2)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{6x^2+12x-3x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{3x^2+12x}{(x+2)^2}\end{aligned}$$

Cuando se deriva una función es «elegante» intentar simplificar la función resultante hasta su mínima expresión siempre que no tome mucho tiempo. Puede pasar que se pida simplificar obligatoriamente.

En nuestro caso no se puede llevar la función a otra expresión más elegante. Sustituimos esto en la derivada que nos piden.

$$\left(\cos\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)\right)' = -\sin\left(\frac{3x^2}{x+2}\right).\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)' = -\sin\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)\left(\frac{3x^2+12x}{(x+2)^2}\right)$$

Ejemplo 4: Calcule la derivada de la función $f(x) = \cos^2\left(\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}\right)$.

Solución:

Aplicaremos Regla de la Cadena y Técnicas de derivación.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\cos\left(\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}\right)\left(\cos\left(\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}\right)\right)' \\
&= 2\cos\left(\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}\right)\left(-\sin\left(\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}\right)\right)\left(\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}\right)' \\
&= 2\cos\left(\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}\right)\left(-\sin\left(\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}\right)\right)\left(\frac{(\sin(4x)+\tan^3(3x))'}{2\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}}\right) \\
&= 2\cos\left(\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}\right)\left(-\sin\left(\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}\right)\right)\left(\frac{(\sin(4x))'+(\tan^3(3x))'}{2\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}}\right) \\
&= 2\cos\left(\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}\right)\left(-\sin\left(\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}\right)\right)\left(\frac{4\cos(4x)+3\tan^2(3x)\sec^2(3x)3}{2\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}}\right) \\
&= -2\cos\left(\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}\right)\sin\left(\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}\right)\left(\frac{4\cos(4x)+9\tan^2(3x)\sec^2(3x)}{2\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}}\right) \\
&= -\sin\left(2\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}\right)\left(\frac{4\cos(4x)+9\tan^2(3x)\sec^2(3x)}{2\sqrt{\sin(4x)+\tan^3(3x)}}\right)
\end{aligned}$$

El último paso es aplicar la identidad trigonométrica $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$

En vista que no hay más «simplificaciones» que hacer dejamos la derivada de $f(x)$ tal como está.

Observe que primero derivamos el exponente con la regla para derivar potencias, luego derivamos el coseno, luego derivamos la raíz, luego lo que está dentro de la raíz que es la suma de dos funciones que como sabemos se pueden derivar por separado con la regla para derivar suma de funciones, así hasta que no haya que derivar más nada.

Ejemplo 5: Diga si es verdadero o falso que: la derivada de la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ es

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

Solución:

En este ejercicio no nos piden que simplifiquemos pero es evidente que por el tipo de pregunta debemos hacerlo.

Podemos aplicar Técnicas de Derivación directamente a la función que nos dan sin embargo si la manipulamos un poco antes de derivarla nos ahorraremos unos cuantos pasos (y oportunidades de cometer errores).

Podemos escribir

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Entonces derivamos la función manipulada en lugar de la «original».

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)' \\
&= \frac{(\sqrt{1+x^2})'\sqrt{1-x^2} - (\sqrt{1-x^2})'\sqrt{1+x^2}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} && \text{(Derivada del Cociente.)} \\
&= \frac{\left(\dfrac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\sqrt{1-x^2} - \left(\dfrac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\sqrt{1+x^2}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} \\
&= \frac{\left(\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\sqrt{1-x^2} - \left(\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\sqrt{1+x^2}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} \\
&= \frac{\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\sqrt{1-x^2} + \left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\sqrt{1+x^2}}{1-x^2} \\
&= \frac{\dfrac{x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\
&= \frac{\dfrac{x(1-x^2)+x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}}{1-x^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\dfrac{x - x^3 + x + x^3}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}}{1-x^2} \\
&= \frac{\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}}{1-x^2} \\
&= \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}(1-x^2)} \\
&= \frac{2x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+x^2}(1-x^2)} && \text{(Aplicamos propiedades de la raíces.)} \\
&= \frac{2x}{(1-x^2)^{(\frac{1}{2}+1)}\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}
$$

Finalmente la derivada de f es $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}\sqrt{1+x^2}}$

Ejemplo 6: Dada la función

$$
f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & , \text{ si } x \leqslant 2 \\ ax - b & , \text{ si } x > 2 \end{cases}
$$

halle los valores de a y b tales que f sea derivable en $\mathbb{R}$.

Solución:

Para que una función sea derivable en un punto $x = c$ debe existir $f'(c)$, esto quiere decir que debe existir aquel límite que trabajamos anteriormente.

Debemos garantizar derivabilidad en todo $\mathbb{R}$ pero, como en continuidad, no vamos a verificarlo para cada punto porque esto no es posible. El siguiente teorema nos quita un peso de encima:

Derivabilidad de polinomios y funciones trigonométricas.

Las funciones polinómicas y las funciones trigonométricas seno y coseno son derivables en todo $\mathbb{R}$.

En los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$ la función está definida de forma polinómica por lo tanto ella es derivable en dichos intervalos, debemos verificar pues si es derivable en $x = 2$. En este caso debemos hallar los valores de a y b para que f sea derivable en $x = 2$.

Antes de comprobar derivabilidad en $x = 2$ existe una condición que se debe cumplir estrictamente: también debe haber continuidad en $x = 2$.

Teorema Continuidad-Derivabilidad.

Si f es derivabe en $x = c$ entonces también es continua en ese punto.

Esto es equivalente a decir que si una función **no es continua** en algún punto entonces **no es derivable** en ese mismo punto.

Debe tener extremo cuidado con este teorema y de no usarlo de manera incorrecta. El teorema dice que **derivabilidad implica continuidad**, no lo interprete al revés. Puede recordarlo considerando la función $f(x) = |x|$, esta función, a pesar de ser continua en $x = 0$, no es derivable en este punto.

Estudiemos la continuidad de la función en $x = 2$ ya que, como hemos dicho, en el resto de los puntos ella es derivable y por lo tanto continua.

Continuidad:

Límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 - ax = 4 - 2a$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} ax - b = 2a - b$$

Como los límites laterales deben existir y ser iguales entonces:

$$\begin{aligned} 4 - 2a &= 2a - b \\ \Longrightarrow 4a - b &= 4 \end{aligned} \tag{I}$$

Hemos obtenido una ecuación con dos incógnitas que no podemos resolver, es de esperarse que estudiando derivabilidad aparezca otra ecuación para así construir una sistema de ecuaciones.

Derivabilidad:

Para que la función sea derivable en $x = 2$ debe existir $f'(2)$, es decir, debe existir el límite:

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

Además este límite existe si y solo si las derivadas laterales existen y son iguales:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

Cuando $x \to 2^-$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-ax-((2)^2-2a)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-ax-4+2a}{x-2} && \text{(Ind del tipo } \tfrac{0}{0}.\text{)} \\
&= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)-a(x-2)}{x-2} && \text{(Agrupación.)} \\
&= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)[(x+2)-a]}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2^-} x+2-a = 4-a
\end{aligned}$$

Cuando $x \to 2^+$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{ax-b-((2)^2-2a)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{ax-b-4+2a}{x-2}
\end{aligned}$$

En este punto parecería que al evaluar el límite obtendremos que no existe, sin embargo de (I) sabemos que $4a-b=4 \Longrightarrow b=4a-4$.

Reemplazamos b en el límite y nos queda:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} \frac{ax-b-4+2a}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{ax-(4a-4)-4+2a}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{ax-2a}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{a(x-2)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2^+} a = a
\end{aligned}$$

Como las derivadas laterales deben ser iguales para que exista $f'(2)$

$$4-a=a \Longrightarrow a=2$$

Si reemplazamos $a=2$ en (I) obtendremos b.

$$4a-b=4 \Longrightarrow 8-b=4 \Longrightarrow b=4$$

Finalmente para que f sea derivable en $\mathbb{R}$ (y por lo tanto continua por el Teorema Continuidad-Derivabilidad) se debe satisfacer que $a=2$ y $b=4$.

Ejemplo 7: Determinar a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & , \text{ si } x \leqslant 1 \\ bx^2 + 2x - 1 & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

Para los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$ la función es derivable y continua ya que en ambos intervalos está definida como un polinomio de segundo grado. Sabemos por teorema que los polinomios son derivables en todo $\mathbb{R}$. Solo nos queda probar que f es derivable en $x = 1$.

Como es un requisito indispensable que la función sea continua antes de ser derivable debemos estudiar la continuidad en $x = 1$.

Continuidad:

Límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x^2 + ax = 2 + a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} bx^2 + 2x - 1 = b + 1$$

Como los límites laterales deben existir y ser iguales:

$$2 + a = b + 1 \tag{I}$$

Hemos obtenido una ecuación con dos incógnitas, el resto de la información para obtener a y b la sacaremos de la derivabilidad.

Derivabilidad:

Calculamos la derivadas laterales:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2 + ax - (2(1)^2 + a(1))}{x - 1} \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2 + ax - (2 + a)}{x - 1} \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2 - 2 + ax - a}{x - 1} \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x^2 - 1) + a(x - 1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x - 1)(x + 1) + a(x - 1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x - 1)(2(x + 1) + a)}{x - 1} \\
&= \lim_{x\to 1^-} 2(x + 1) + a = 4 + a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{bx^2+2x-1-(2(1)^2+a(1))}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{bx^2+2x-1-(2+a)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{bx^2+2x-1-(b+1)}{x-1} && \text{(Utilizamos (I).)} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{bx^2+2x-b-2}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{b(x^2-1)+2(x-1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{b(x-1)(x+1)+2(x-1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(b(x+1)+2)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} b(x+1)+2 = 2b+2
\end{aligned}$$

Como las derivadas laterales deben ser iguales para que exista $f'(1)$ entonces:

$$4+a = 2b+2 \tag{II}$$

Ahora ya podemos construir el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2+a=b+1 \\ 4+a=2b+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-a=1 \\ \underline{2b-a=2} \end{cases}$$

$$3b=3 \Longrightarrow b=1$$

$$\Longrightarrow a=0$$

Finalmente para que f sea derivable en $x=1$, y así en todo $\mathbb{R}$, se debe cumplir que $a=0$ y $b=1$, además por Teorema Continuidad-Derivabilidad también será continua en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 8: Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{7}{3}} & , \text{ si } x < 0 \\ 1 - \cos(x) & , \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a. Calcule $f'(0)$

b. Calcule la función $f'(x)$

c. Calcule $f''(0)$

d. Calcule la función $f''(x)$

Solución:

Parte a.

Antes de pasar a hacer cualquier cálculo es necesario notar que $f(x)$ es derivable en $(-\infty, 0)$ por estar definida como una raíz cúbica. Por otro lado en $(0, +\infty)$ $f(x)$ está definida como combinación de funciones derivables en $\mathbb{R}$. Solo queda saber si $f(x)$ es derivable en $x = 0$, en caso de serlo se debe satisfacer lo siguiente:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Cuando $x \to 0^-$:

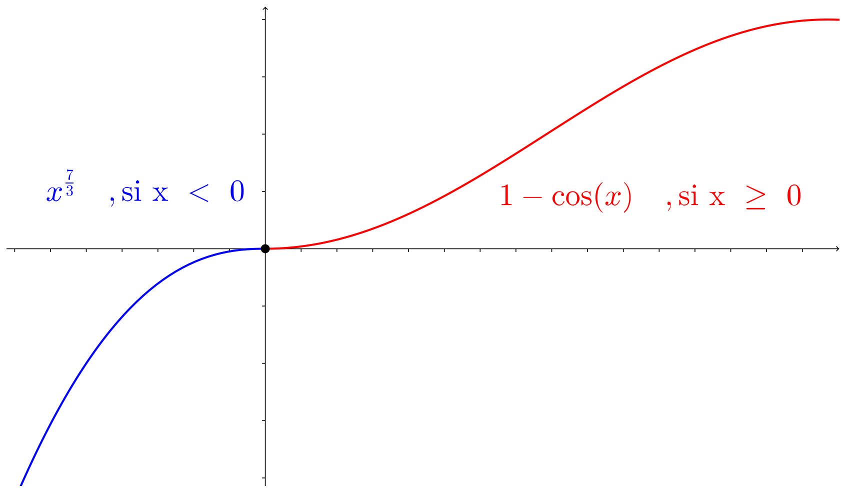
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^{\frac{7}{3}} - (1 - \cos(0))}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^{\frac{7}{3}}}{x} = \lim_{x \to 0^-} x^{\frac{7}{3} - 1} = \lim_{x \to 0^-} x^{\frac{4}{3}} = 0$$

Cuando $x \to 0^+$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(x) - (1 - \cos(0))}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x} \left(\frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right) \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos^2(x)}{x} \left(\frac{1}{1 + \cos(x)} \right) \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x} \left(\frac{1}{1 + \cos(x)} \right) \\ &= \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \right) \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} \right) = 0 \end{aligned}$$

Luego las derivadas laterales existen, son iguales y valen cero, de modo que $f'(0) = 0$.

Observe la gráfica de $f(x)$ y observe el por qué la derivada nos ha dado cero y por qué es derivable allí.



Parte b.

Como ya hemos visto que f es derivable en $\mathbb{R}$ podemos decir que la derivada de f es la derivada de cada uno de sus trozos y la función resultante es válida para todo $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \left(x^{\frac{7}{3}}\right)' & , \text{ si } x < 0 \\ (1 - \cos(x))' & , \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} & , \text{ si } x < 0 \\ \sin(x) & , \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Parte c.

La función f', resultado de derivar f, es derivable en el intervalo $(-\infty, 0)$ pues está definida como $\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}$. En el intervalo $(0, +\infty)$ f es derivable pues está definida como la función trigonométrica seno.

Ahora debemos calcular la segunda derivada evaluada en cero, para esto debemos saber si f' es derivable en $x = 0$, es decir debemos verificar si existe $f''(0)$, en caso de serlo se debe cumplir:

$$f''(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$$

Cuando $x \to 0^-$

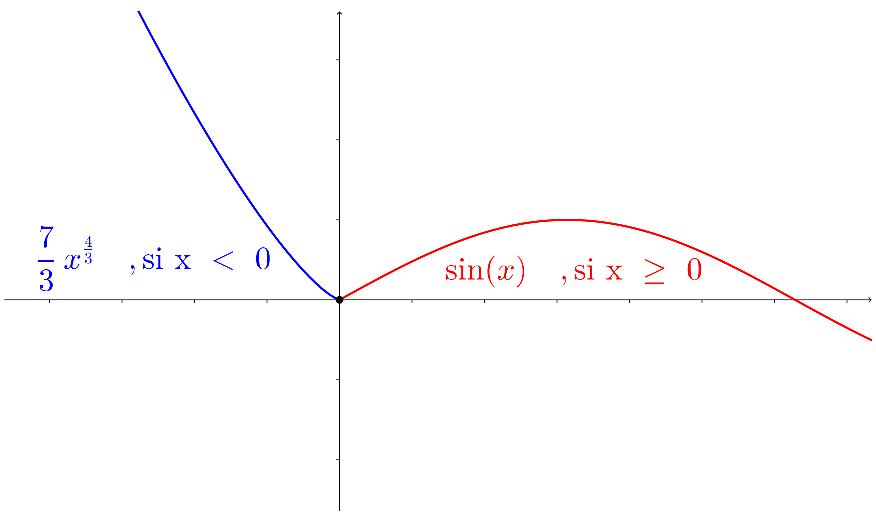
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \lim_{x\to 0^-} x^{\frac{1}{3}} = 0$$

Cuando $x \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

En vista de que las derivadas laterales son distintas entonces no existe $f''(0)$, es decir, $f'(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Se deja la gráfica de la función $f'(x)$ para que usted visualice por qué no es derivable en $x = 0$.



Parte d.

Ya sabemos que $f'(x)$ no es derivable en $x = 0$ pero sí en el resto de los números reales por lo tanto podemos expresar la derivada de $f'(x)$ para todo $\mathbb{R} - \{0\}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \begin{cases} \left(\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}\right)' & \text{, si } x < 0 \\ (\sin(x))' & \text{, si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{28}{9}x^{\frac{1}{3}} & \text{, si } x < 0 \\ \cos(x) & \text{, si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Observe que la función $f''(x)$ no está definida en $x = 0$ ya que $f'(x)$ no es derivable en este punto.

Bibliografía.

- **Demidovich, B.** (1967). *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*(2a. ed.). Moscú: Editorial Mir.
- **Dennis, G. Zill y Warren, S. Wright.** (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (4a. ed.).México, D. F.: McGraw Hill.
- **Valera, M. T.** *Guías de Ejercicios.* Universidad Simón Bolívar.
- **Guzmán M.A.** (2014). *Guía de Ejercicios de Matemáticas 1 con Soluciones.* Universidad Simón Bolívar.

Este material fue, resuelto y tipeado en LaTeX por Miguel Ángel Labrador para uso de toda la comunidad académica. Algunos ejercicios fueron tomados de parciales realizados en cursos de MA-1111 de la Universidad Simón Bolívar.

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección **miguelangel2801@gmail.com**.

Este material se actualizó por última vez en **diciembre de 2017**.