Universidad Simón Bolívar
Matemáticas I (MA-1111)
Segundo Examen Parcial

Elaborado por: Miguel Ángel Labrador
Ingeniería Electrónica
Carnet: 12-10423
Correo: miguelangel2801@gmail.com
Twitter: @miguelangel2801

PREPARADURÍA Nº 6

Matemáticas I (MA-1111)

Continuidad, Teorema de Valor Intermedio y Recta Tangente

Ejemplo 1: *Determine los puntos de discontinuidad de*

$$f(x) = \begin{cases} -1 \quad , & \text{si } x < -1 \\ x^3 \quad , & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 - x \quad , & \text{si } 1 < x < 2 \\ 3 - x^2 \quad , & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en un punto

Se dice que una función f es continua en un número a si

$i)$ $f(a)$ está definido $\quad ii)$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe $\quad iii)$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

En caso de que no se cumpla alguna de estas tres condiciones decimos que la función no es continua. Dependiendo de que condición es la que no se cumple hablamos de diferentes tipos de discontinuidad.

Fíjese que tenemos una función definida a trozos. Debemos verificar qué puntos cumplen con la condiciones para que f sea continua y ver cuáles son los que no. Sin embargo, no vamos a verificarlas para cada número real, esto sería imposible. El siguiente teorema nos ayudar a resolver este inconveniente.

Continuidad de la suma, el producto y el cociente de funciones

Si las funciones f y g son continuas en un número a, entonces la suma $f+g$, el producto fg y el cociente f/g ($g(a) \neq 0$) son continuos en $x=a$.

A partir de la definición de continuidad, se sabe que $f(x)=x$ es una función continua en todas partes ($\mathbb{R}$), entonces por el teorema que acabamos de enunciar: un polinomio, que no es más que la suma de potencias de la función f , será continuo en todas partes.

Continuidad de funciones polinomiales.

Una función polinomial f es continua en $\mathbb{R}$.

Este teorema nos permite decir lo siguiente:

En los intervalos $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,2)$ y $(2,1)$ f está definida por polinomios, por lo tanto es continua para todos los valores dentro de dichos intervalos.

Solo falta preguntarnos qué pasa en $x=-1$, $x=1$, $x=2$. Fíjese que no hemos incluido estos números en los intervalos puesto que, justo en ellos, la función cambia de comportamiento, en otras palabras, puede que en alguno la función sea discontinua.

Continuidad para $\mathbf{x=-1}$

Aplicamos la definición de continuidad para un punto, para este caso $a=-1$.

(I) Veamos si existe $f(-1)$.

Como la función f está definida en todos los números reales, o sea $\mathrm{Dom} f=\mathbb{R}$ (lo cual no significa que sea continua en $\mathbb{R}$), entonces $f(-1)$ existe, de hecho

$$f(-1)=(-1)^3=-1$$

ya que para $x=-1$ la función está definida como x^3 (véase el dominio del segundo trozo de la función f si no ha comprendido bien esto. Note que se incluye el -1).

(II) Veamos si existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

Para saber si existe el límite de la función cuando x tiende a -1, tendremos que calcular sus límites laterales.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} -1=-1$$

Note que cuando nos aproximamos a -1 por la izquierda estamos haciéndolo en el intervalo definido por $x<-1$ y la función en dicho intervalo está definida como $f(x)=-1$.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} x^3=-1$$

En vista de que:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = -1$$

Entonces el $\lim_{x \to -1} f(x)$ existe.

(III) Verifiquemos que $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

En efecto, de lo estudiado anteriormente tenemos que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = -1$$

Finalmente, como se cumplen las tres condiciones, concluimos que f es continua en $x = -1$.

Continuidad para x = 1

(I) Veamos si existe $f(1)$.

El número 1 pertenece a al dominio de f y

$$f(1) = (1)^3 = 1$$

(II) Veamos si existe $\lim_{x \to 1} f(x)$

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^3 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 - x = 0$$

En vista de que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

Entonces el $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.

De aquí, ya no tenemos siquiera que verificar la tercera condición, ya que, al no cumplirse alguna de las tres condiciones, podemos concluir que la función es discontinua.

Luego, f es discontinua en $x = 1$.

Continuidad para x = 2

(I) Veamos si existe $f(2)$.

El número 2 pertenece a al dominio de f, además

$$f(2) = 3 - (2)^2 = -1$$

(II) Veamos si existe $\lim_{x \to 2} f(x)$

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 1 - x = -1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 3 - x^2 = -1$$

En vista de que:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

Entonces el $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe.

(III) Verifiquemos que $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

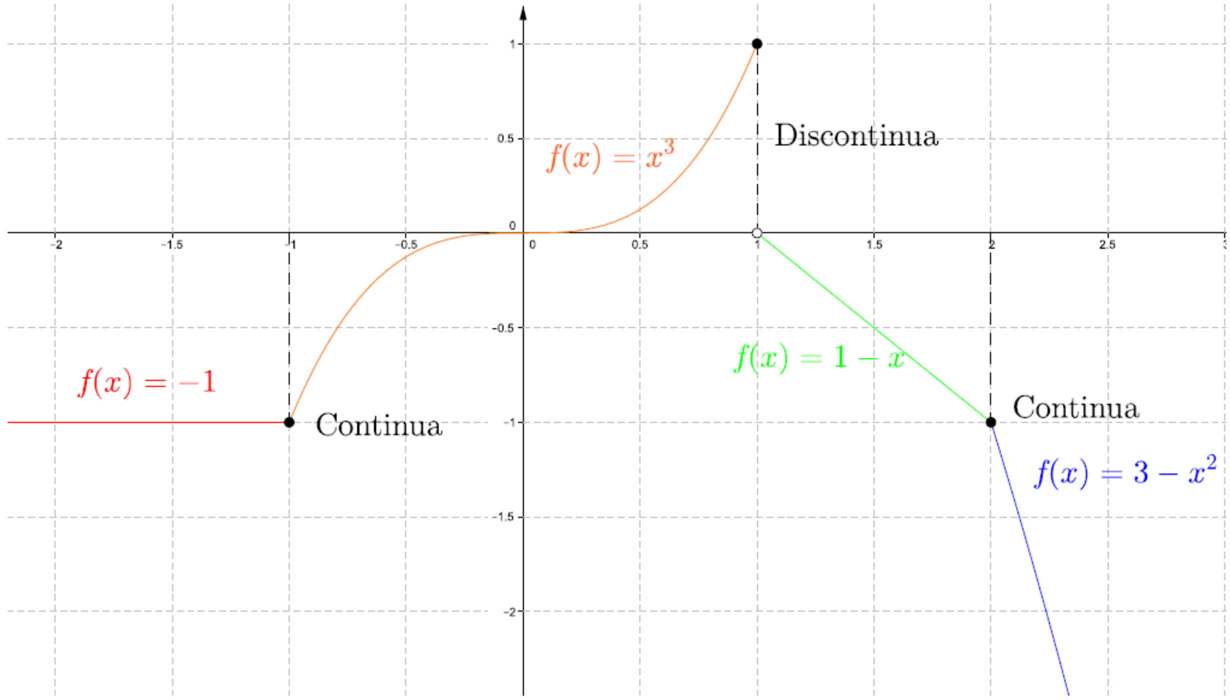
En efecto, ya que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = -1$$

Finalmente, f es continua en $x = 2$.

Con esta información podemos decir entonces que f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, en otras palabras, f solo es discontinua en $x = 1$.

Observe todo lo que hemos dicho con las cuentas que hemos hecho en la gráfica de la función f.



Ejemplo 2: *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 7x - 18}{x^2 - 4} & \text{, si } x > 2 \\ b & \text{, si } x = 2 \\ x + a & \text{, si } x < 2 \end{cases}$$

Halle los valores de a *y* b *para que* f *sea continua en todo* $\mathbb{R}$

Solución:

Debe notar que en el intervalo $(-\infty, 2)$ la función está definida por un polinomio de grado 1 y sabemos también que todo polinomio es continuo en $\mathbb{R}$, por lo tanto, dicho polinomio de primer grado será continuo en el intervalo señalado par cualquier valor de a. Por otro lado, en el intervalo $(2, +\infty)$ la función está definida como un cociente de dos polinomios que, por el teorema de la continuidad de la suma, producto y el cociente de funciones, sabemos que es continuo excepto donde se anula el denominador. Si se fija, esto ocurre para $x = 2$ y $x = -2$, los cuales, no están en el intervalo $(2, +\infty)$, por lo tanto, concluimos que para $(2, +\infty)$ la función es continua. [1]

El único número donde no hemos podido garantizar aún continuidad es en $x = 2$, puesto que es el valor donde la función muta de una forma a otra. Utilizaremos nuevamente la definición de continuidad en un punto para garantizar continuidad y se dará cuenta que haciendo esto podremos obtener a y b.

[1]Parte de su justificación en un problema como este es redactar el comentario que acabamos de hacer.

Continuidad para x = 2

(I) Veamos si existe $f(2)$.

El número 2 pertenece a al dominio de f. Vea que el dominio de f es $\mathbb{R}$.

$$f(2) = b$$

(II) Veamos si existe $\lim_{x\to 2} f(x)$

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+7x-18}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+9)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+9}{x+2} = \frac{11}{4}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x + a = 2 + a$$

Sabemos que para que el límite exista, los límites laterales deben existir y ser iguales, entonces:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) \Longrightarrow \frac{11}{4} = 2 + a \tag{1}$$

Si la ecuación (1) se cumple entonces, se satisface la segunda condición. Esto es equivalente a pedir que:

$$\frac{11}{4} = 2 + a \Longrightarrow a = \frac{11}{4} - 2 \Longrightarrow a = \frac{3}{4}$$

De manera que se cumple la segunda condición siempre que $a = \dfrac{3}{4}$.

(III) Verifiquemos que $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \Longrightarrow \frac{11}{4} = b$$

También pudimos haber dicho:

$$2 + a = b \Longrightarrow 2 + \frac{3}{4} = b \Longrightarrow \frac{11}{4} = b$$

Y llegamos al mismo resultado.

De manera que si $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ y $\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{4}}$, f será continua en $(-\infty, \infty)$

Ejemplo 3: *Encuentre todos los valores de a y b para que f sea discontinua removible (evitable).*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-8}{4-x^2} & \text{, si } x < -2 \\ ax^2-3 & \text{, si } x > -2 \\ b & \text{, si } x = -2 \end{cases}$$

Solución:

Antes que nada, vea los tipos de discontinuidades y la terminología usada para clasificarlas.

Tipos de Discontinuidades

- Si $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x)$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad infinita** en a. Un ejemplo de función con este tipo de discontinuidad es la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, donde la función tiene una asíntota vertical en $x = 1$ (Figura 1).

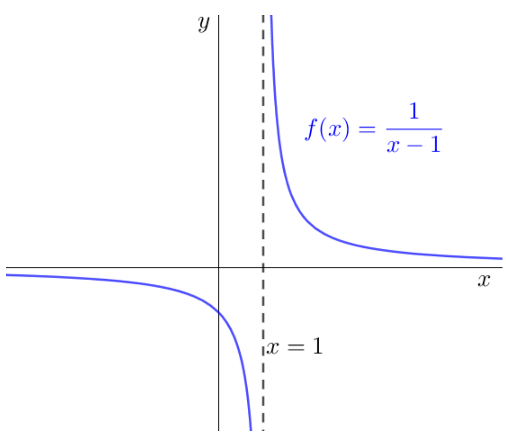


Figura 1: Discontinuidad infinita.

- Si los límites laterales de f existen pero son distintos, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad finita** o una **discontinuidad de tipo salto** en a. Un ejemplo es la función a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 3\,\mathrm{sen}(x) & \text{, si } x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{, si } x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

de la Figura 2. Note que los límites laterales existen pero son distintos.

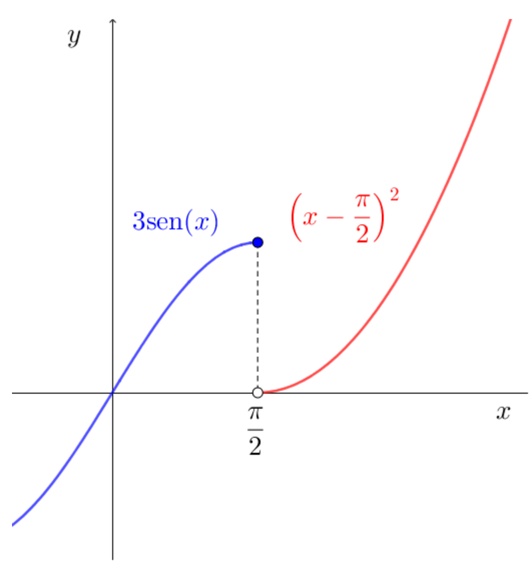


Figura 2: Discontinuidad de tipo finita o de salto.

- Si existe el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pero no existe $f(a)$ o $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ (tercera condición necesaria para la continuidad) entonces decimos que f tiene una **discontinuidad evitable** o **removible** en a. Vea el ejemplo de la Figura 3, donde f no está definida en 1 pero si existe el límite para este número. Bastaría con definir como $f(1) = 3$ para remover la discontinuidad.

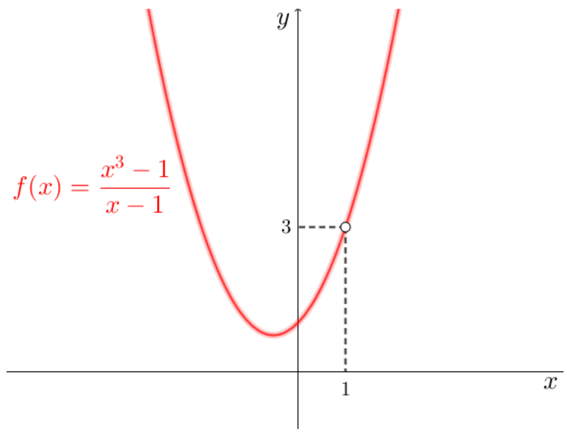


Figura 3: Discontinuidad evitable o removible.

Ahora bien, observe que f es continua para el intervalo definido por $x < -2$, por estar definida como un cociente de polinomios, cuyas raíces en el denominador no están en dicho intervalo. Así mismo, será continua en $x > -2$ por ser un polinomio de grado dos.

Luego, f solo podría ser discontinua en $x = -2$, en particular, haremos que tenga una discontinuad removible, por lo que haremos que la tercera condición necesaria para la continuidad, no se cumpla. Sin embargo, sí haremos que se cumplan las primeras dos. [2]

Discontinuad para $\mathbf{x = -2}$

(I) Veamos si existe $f(-2)$.

El número -2 pertenece a al dominio de f. Vea que el dominio de f es $\mathbb{R}$.

$$f(-2) = b$$

(II) Hagamos que exista $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-2x-8}{4-x^2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-4)(x+2)}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-4}{2-x} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} ax^2 - 3 = 4a - 3$$

Sabemos que para que el límite exista, los límites laterales deben existir y ser iguales, entonces:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) \Longrightarrow -\frac{3}{2} = 4a - 3$$

[2]Si no se llega a cumplir la segunda condición necesaria para la continuidad, entonces ya no hablaríamos de una continuidad evitable o removible. ¿ Qué tipo de discontinuidad sería?

De aquí, si queremos una discontinuidad evitable,es decir, que el límite exista, entonces se debe satisfacer:

$$-\frac{3}{2} = 4a - 3 \Longrightarrow a = \frac{3}{8}$$

(III) Ya que deseamos una discontinuidad evitable solo debemos hacer que la tercera condición necesaria para la continuidad, no se cumpla, haciendo

$$\lim_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$$
$$\Longrightarrow -\frac{3}{2} \neq b$$

Finalmente, para que f tenga una discontinuidad evitable o removible se tiene que cumplir que

$$\mathbf{a} = \mathbf{\frac{3}{8}} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b} \neq -\mathbf{\frac{3}{2}}$$

Ejemplo 4: *Analice la continuidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} |x-3| + \cos(1) & , \text{ si } x > 3 \\ 0 & , \text{ si } x = 3 \\ (x-2)^2 \cos\left(\dfrac{1}{x-2}\right) & , \text{ si } x < 3 \text{ y } x \neq 2 \\ 0 & , \text{ si } x = 2 \end{cases}$$

Solución:

Observe que la función a trozos está definida de una forma algo rebuscada, por lo que tenemos que identificar muy bien qué forma tiene para los intervalos y números de interés.

Elaboremos una tabla con la esperanza de que le ayude a entender la expresión que adopta la función en los diferentes valores de x.

	$(-\infty, 2)$	$x = 2$	$(2, 3)$	$x = 3$	$(3, \infty)$
$\mathbf{f(x)}$	$(x-2)^2 \cos\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$	0	$(x-2)^2 \cos\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$	0	$\lvert x-3\rvert + \cos(1)$

En los intervalos $(-1, 2)$ y $(2, 3)$, f es continua por estar definida como el producto de funciones continuas en los mismo. Así mismo, en $(3, \infty)$, f es continua ya que se trata de la suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$, en particular en $(3, \infty)$.

Nos falta estudiar la continuidad en $x = 2$ y $x = 3$.

Continuidad para x = 2

(I) Veamos si existe $f(2)$.

Dom$f = \mathbb{R}$, de la expresión de $f(x)$ o del cuadro que construimos, se tiene que:

$$f(2) = 0$$

(II) Veamos si existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Calculamos los límites laterales.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x-2)^2 \cos\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

Como se habrá dado cuenta ya, el calculo de este límite no es tan trivial como los anteriores.

Aplicaremos las técnicas que ya conocemos para calcular este tipo de límites.

Observe que:

$$\left|\cos\left(\frac{1}{x-2}\right)\right| \leqslant 1 \Longleftrightarrow -1 \leqslant \cos\left(\frac{1}{x-2}\right) \leqslant 1$$

Multipliquemos todos los miembros de la desigualdad por el factor $(x-2)^2$:

$$-(x-2)^2 \leqslant (x-2)^2 \cos\left(\frac{1}{x-2}\right) \leqslant (x-2)^2$$

Tomamos límites:

$$\lim_{x \to 2^-} -(x-2)^2 \leqslant \lim_{x \to 2^-} (x-2)^2 \cos\left(\frac{1}{x-2}\right) \leqslant \lim_{x \to 2^-} (x-2)^2$$

Note que:

$$\lim_{x \to 2^-} (x-2)^2 = \lim_{x \to 2^-} -(x-2)^2 = 0$$

Luego, por el **Teorema del Sándwich**:

$$\lim_{x \to 2^-} (x-2)^2 \cos\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0$$

El análisis para calcular $\lim\limits_{x \to 2^+} (x-2)^2 \cos\left(\frac{1}{x-2}\right)$ es exactamente el mismo y se tiene que:

$$\lim_{x \to 2^+} (x-2)^2 \cos\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0$$

De manera que:

$$\lim_{x \to 2} (x-2)^2 \cos\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0$$

(III) Verifiquemos que $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

En efecto, de la parte (I) y (II) tenemos que :

$$\lim_{x\to 2}(x-2)^2\cos\left(\frac{1}{x-2}\right) = f(2) = 0$$

Finalmente, f es **continua** en $x = 2$.

Continuidad para x = 3

(I) Veamos si existe $f(3)$.

El número 3 pertenece a al dominio de f, además, del cuadro construido a partir de $f(x)$, es fácil ver que:

$$f(3) = 0$$

(II) Veamos si existe $\lim_{x\to 3} f(x)$

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x-2)^2\cos\left(\frac{1}{x-2}\right) = \cos(1)$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}|x-3| + \cos(1) = \cos(1)$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \cos(1)$$

De manera que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \cos(1)$$

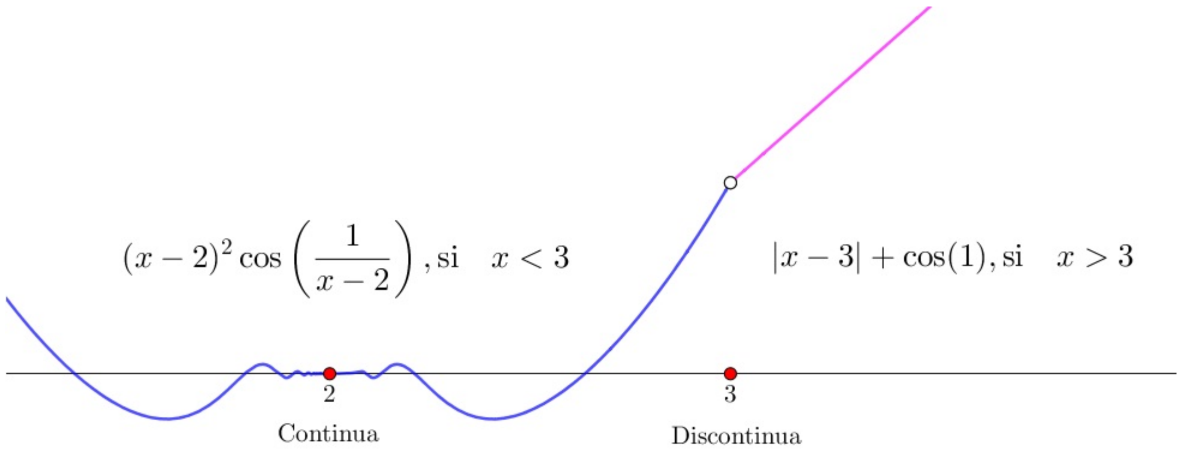
(III) Verifiquemos que se cumpla $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

De las partes (I) y (II) tenemos que

$$\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$$

Finalmente, f tiene una **discontinuidad removible** en $x = 3$.

Se deja la gráfica de la $f(x)$ para que usted se convenza y compare los resultados obtenidos con los resultados de la gráfica.



Ejemplo 5: *Considere la función*

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)^2-1 & \text{, si } x\leqslant -\frac{3}{2}\\ \operatorname{sen}(\pi x) & \text{, si } -\frac{3}{2}<x\leqslant\frac{3}{2}\\ 4x+b & \text{, si } x>\frac{3}{2}\end{cases}$$

Solución:

Se pide estudiar, directamente, la continuidad en dos puntos por lo tanto no tenemos que hacer el análisis de lo que sucede en el resto, aunque no es difícil de saber.

Continuidad para $\mathbf{x}=-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

(I) Veamos si existe $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.

El número $-\dfrac{3}{2}$ pertenece al dominio de f y

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}-a\right)^2-1$$

(II) Veamos si existe $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} f(x)$

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to-\frac{3}{2}^-}(x-a)^2-1=\left(-\frac{3}{2}-a\right)^2-1$$

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{3}{2}^+} \operatorname{sen}(\pi x) = \operatorname{sen}\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = 1$$

Para que el límite exista, los límites laterales deben existir y ser iguales, entonces:

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{3}{2}^+} f(x) \Longrightarrow \left(-\frac{3}{2} - a\right)^2 - 1 = 1$$

De esta última ecuación podemos obtener a:

$$\left(-\frac{3}{2} - a\right)^2 - 1 = 1 \Longrightarrow \left(\frac{3}{2} + a\right)^2 = 2 \Longrightarrow \frac{3}{2} + a = \pm\sqrt{2} \Longrightarrow a = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{2}$$

De forma que si $a = -\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ o $a = -\frac{3}{2} - \sqrt{2}$ el límite existe.

(III) Verifiquemos que $\lim_{x\to -\frac{3}{2}} f(x) = f\left(-\frac{3}{2}\right)$

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}} f(x) = f\left(-\frac{3}{2}\right) \Longrightarrow 1 = \left(-\frac{3}{2} - a\right)^2 - 1$$

Observe que, por los resultados de la parte (II), esta última ecuación siempre se cumplirá.

Finalmente, f será **continua** en $x = -\frac{3}{2}$ siempre que $a = -\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ o $a = -\frac{3}{2} - \sqrt{2}$.

Continuidad para $\mathbf{x = \frac{3}{2}}$

(I) Veamos si existe $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

El número $\frac{3}{2}$ pertenece al dominio de f, además

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$$

(II) Veamos si existe $\lim_{x\to \frac{3}{2}} f(x)$

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{3}{2}^-} \operatorname{sen}(\pi x) = \left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}^+} 4x + b = 6 + b$$

Para que el límite exista, los límites laterales deben existir y ser iguales, entonces:

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x) \Longrightarrow -1 = 6 + b \Longrightarrow b = -7$$

De manera que, si $b = -7$, el límite existe.

(III) Verifiquemos que $\lim_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right)$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) \Longrightarrow 6 + b = -1$$

Como $b = -7$ entonces se cumple la tercera condición necesaria para la continuidad.

Finalmente, f será **continua** en $x = \dfrac{3}{2}$ siempre que $b = -7$.

Ejemplo 6: *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} -3g(0) & \text{, si } x = 0 \\ (g(x))^2 - 2h(x) & \text{, si } x \neq 0 \end{cases}$$

Si se sabe que la función g es continua en $x = 0$ y $\lim_{x \to 0^-} g(x) = 3$, determine las condiciones mínimas que debe cumplir la función h para que f sea continua en $x = 0$.

Solución:

Lo primero que debe observar es que la función g es continua en $x = 0$ y eso implica que se cumplen las tres condiciones necesarias para la continuidad. Además, nos dan $\lim_{x \to 0^-} g(x) = 3$ por lo que tenemos bastante información de la función.

De la información que nos dan, tenemos que:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^-} g(x) = 3 \Longrightarrow \lim_{x \to 0} g(x) = 3$$

Además, por ser continua en $x = 0$, la tercera condición necesaria para la continuidad debe cumplirse por lo tanto:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = g(0) \Longrightarrow g(0) = 3$$

Con esta información en la mano, atacamos el problema desde la raíz. Se quiere hacer que la función f sea continua en $x = 0$ para lo cual no deberá pensar en aplicar las artes ocultas, solo debe apegarse al procedimiento que hemos usado en no pocas ocasiones ya.

Continuidad para $\mathbf{x = 0}$:

(I) Veamos si existe $f(0)$.

El cero está dentro del dominio de f, además:

$$f(0) = -3g(0)$$

(II) Veamos si existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (g(x))^2 - 2h(x)$$

Note que no conviene evaluar el límite pues no conocemos $h(x)$, sin embargo, si ha entendido bien el enunciado, estará de acuerdo en que no nos interesa conocer h pues el problema se trata de colocar condiciones sobre ella.

$$\lim_{x\to 0^+} (g(x))^2 - 2h(x) = \lim_{x\to 0^+} (g(x))^2 - 2\lim_{x\to 0^+} h(x) = \left(\lim_{x\to 0^+} g(x)\right)^2 - 2\lim_{x\to 0^+} h(x)$$

Vea que el límite $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ ya lo conocemos de la información que obtuvimos al principio, de manera que:

$$\left(\lim_{x\to 0^+} g(x)\right)^2 - 2\lim_{x\to 0^+} h(x) = 9 - 2\lim_{x\to 0^+} h(x)$$

En este punto no podemos hacer mucho más.

Calculamos el otro límite lateral. De la misma forma:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (g(x))^2 - 2h(x) = \left(\lim_{x\to 0^-} g(x)\right)^2 - 2\lim_{x\to 0^-} h(x) = 9 - 2\lim_{x\to 0^-} h(x)$$

Ahora bien, si se quiere que f sea continua en $x = 0$, debemos hacer que sus límites laterales sea iguales.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \Longrightarrow 9 - 2\lim_{x\to 0^+} h(x) = 9 - 2\lim_{x\to 0^-} h(x)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^-} h(x)$$

Observe a lo que hemos llegado. Para que el límite $\lim_{x\to 0} f(x)$ exista, entonces el $\lim_{x\to 0} h(x)$ también debe existir. En otras palabras, la **primera condición** que tenemos que poner sobre $h(x)$ es que su límite cuando $x \to 0$ exista.

(III) Verifiquemos que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Para que se cumpla la tercera condición es necesario que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = -3g(0) = -9 \qquad \text{Recuerde que } g(0) = 3\text{, de la información incial.}$$

Como ya sabemos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ existirá siempre que exista $\lim_{x\to 0} h(x)$, entonces podemos escribir:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (g(x))^2 - 2h(x) = 9 - 2\lim_{x\to 0} h(x) = -9 \Longrightarrow -2\lim_{x\to 0} = -18 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} h(x) = 9$$

Esta sería la **segunda condición** que tendríamos que colocar sobre h para que f sea continua en $x = 0$.

Finalmente, para que f sea continua en $x = 0$ el límite $\lim_{x\to 0} h(x)$ debe existir y valer 9.

Ejemplo 7: *Responda las preguntas a continuación:*

1. Enuncie el Teorema de Valor Intermedio.
2. Verifique que la ecuación $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$ tiene al menos una solución real.

Solución:

Este ejercicio fue tomado de un parcial por lo que sí, este tipo de preguntas pueden aparecer y usted debe conocer, memorizar y entender todos los teoremas y definiciones que hemos trabajado y que seguirían apareciendo en futuros cursos de matemáticas.

Parte a:

Teorema de Valor Intermedio

Si f denota una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ para el cual $f(a) \neq f(b)$ y si N es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe por lo menos un número c entre a y b tal que $f(c) = N$.

Parte b:

Ahora debemos emplear el teorema para garantizar que la ecuación que nos dan tiene al menos una solución.

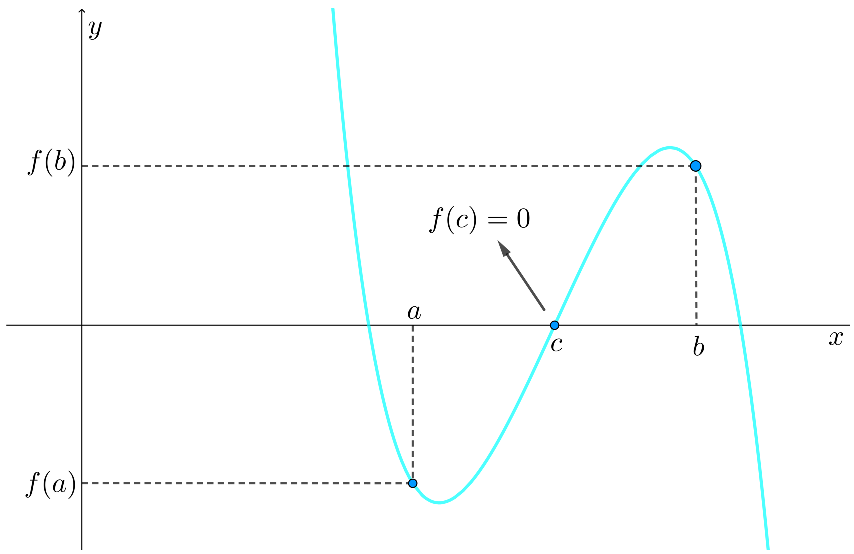
Veamos qué es lo que tenemos y luego cómo utilizar el teorema a nuestro favor. [3]

[3] Una buena idea para resolver este problema, sin tantos rodeos, es factorizar la expresión y observar cuántas raíces hay y concluir que hay al menos una. Sin embargo, su intuición debería ser suficiente para darse cuenta de que no podrá hacerlo en este ejercicio. Inténtelo para que se convenza.

Fíjese que buscar una solución para la ecuación $x^5+4x^3-7x+14=0$ es lo mismo que buscar las raíces de la función $f(x)=x^5+4x^3-7x+14$. Recuerde que si algún número c es una raíz de f, entonces $f(c)=0$.

Ya que para este problema no nos interesa saber cuáles son las raíces, sino saber si existe al menos una, usaremos la siguiente idea que se desprende del mismísimo teorema:

Suponga que tenemos una función que es continua en el intervalo $[a,b]$, donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos algebraicos distintos, en otras palabras, que uno es positivo y el otro es negativo, tal como aparece en la figura, entonces habrá un número (que no necesariamente conocemos) que llamaremos c para el cual se satisface que $f(c)=0$, es decir, c sería una raíz de f. En otras palabras, si $f(x)$ es continua y cambia de signo, en algún punto tendrá que valer cero.



Ahora, considere el intervalo $[-2,0]$ y evaluemos la función en sus extremos, vea que

$$f(-2)=-36<0 \qquad \text{y} \qquad f(0)=14>0$$

Vea que $f(-2)$ y $f(0)$ tienen signos algebraicos distintos. Esto quiere decir que la función cambia de signo al menos una vez, en el intervalo $[-2,0]$, por lo tanto $f(x)$ debe valer cero para al menos un valor de $x\in[-2,0]$, es decir tiene que tener al menos una raíz en dicho intervalo. ¿ Pero podemos realmente afirmar que se hace cero, en otras palabras, que hay raíces en este intervalo?

Para poder sustentar o justificar esta afirmación nos valemos de la idea que ya expusimos y que es consecuencia del Teorema de Valor Intermedio.

Ya que la función f es una función polinómica, por lo tanto continua, y cambia de signo al menos una vez en el intervalo $[-2,0]$, lo que significa que en algún momento vale cero, entonces, por el Teorema de Valor Intermedio, existe al menos un $c\in[-2,0]$ tal que $f(c)=0$. En otras palabras, la función tiene al menos una raíz en el intervalo $[-2,0]$, lo cual es equivalente a decir que la ecuación $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$ tiene al menos una solución en dicho intervalo. Esto responde directamente a la pregunta que se nos formuló.

Nota. Usted pudo haber escogido cualquier intervalo de prueba, no necesariamente el $[-2,0]$. La idea fue encontrar dos valores de x tal que al pasárselos a la función f obtuviésemos signos algebraicos distintos.

Ejemplo 8: *Averigüe si* $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ *tiene exactamente tres soluciones en el intervalo* $[-1,3]$

Solución:

Como ya sabemos, que nos pidan la soluciones de $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ es equivalente a que nos pidan las raíces de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Intentemos usar la misma idea del ejemplo anterior, pero para ello necesitaremos ver que hallan al menos tres cambios de signo en el intervalo $[-1,3]$. Lo que haremos será dividir el intervalo $[-1,3]$ en tres "trozos"distintos y ver si en cada trozo existe algún cambio de signo.

Advierta que esta tarea es un poco complicada ya que hay infinitas formas de separar el intervalo en tres trozos distintos, pero no se asuste, verá que con un poco de astucia podremos resolver el problema sin complicaciones.

Una forma de separar en tres trozos el intervalo $[-1,3]$ es:

$$[-1,3] = [-1,0) \cup [0,1] \cup (1,3]$$

Considere el intervalo $[-1,0]$ y vea que:

$$f(-1) = -3 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(0) = 1 > 0 \qquad\qquad \text{Hay cambio de signos algebraicos.}$$

Hagamos lo mismo con los intervalos $[0,1]$ y $[1,3]$

$$f(0) = 1 > 0 \qquad \text{y} \qquad f(1) = -1 < 0 \qquad\qquad \text{Hay cambio de signos algebraicos.}$$

$$f(1) = -1 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(3) = 1 > 0 \qquad\qquad \text{Hay cambio de signos algebraicos.}$$

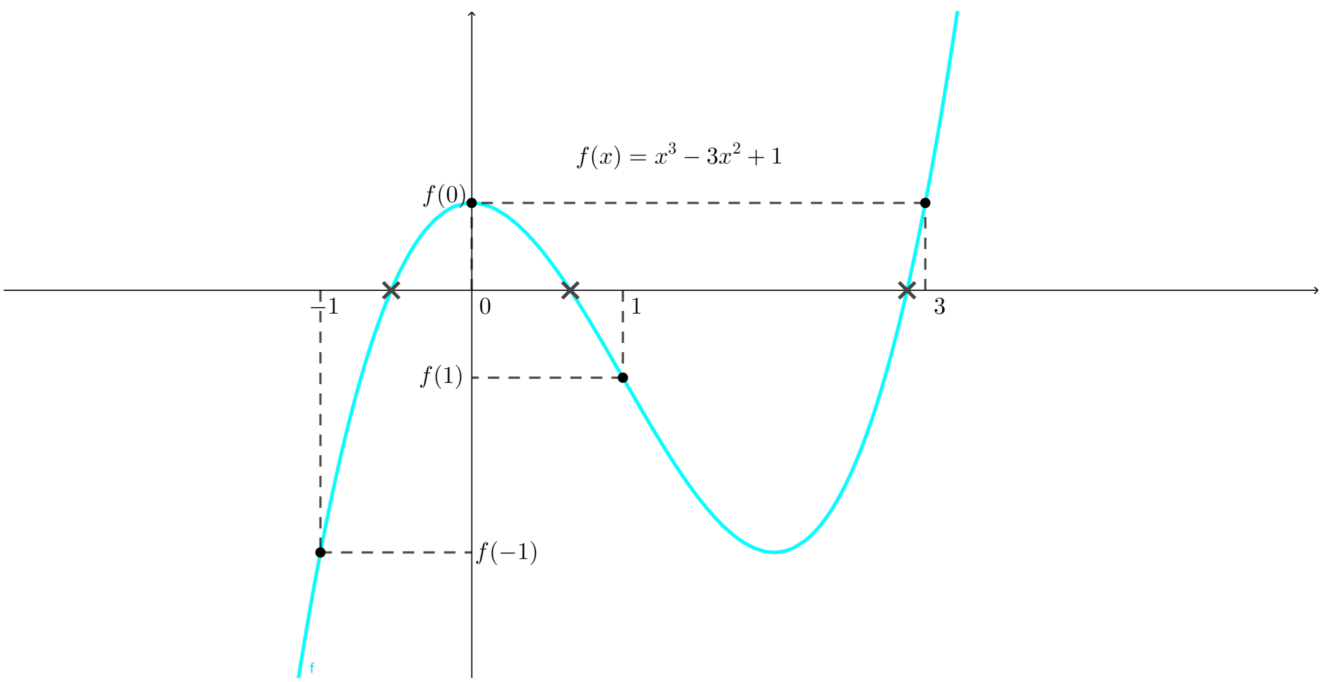
Observe que la función presenta al menos un cambio de signo en cada uno de los intervalos que escogimos, de forma que sospechamos que existe al menos una raíz en cada intervalo. Si consideramos que estos tres intervalos son distintos y están dentro del $[-1,3]$ entonces es posible que existan al menos tres raíces en este intervalo.

Para verificarlo usaremos, de nuevo, el Teorema de Valor Intermedio.

Vea que, por un lado tenemos que la función es continua en $\mathbb{R}$, por estar definida como un polinomio de grado tres (y más aún lo será en $[-1,3]$). Por otro lado, hay al menos tres cambios de signo en $[-1,3]$, lo que nos hace sospechar que existen al menos tres números: c_1, c_2 y c_3 pertenecientes a $[-1,3]$, tales que $f(c_1)=0$, $f(c_2)=0$ y $f(c_3)=0$, en otras palabras, que son raíces de f. Sin embargo, dado que la función es continua, es decir, se satisface la hipótesis del teorema, entonces sí, podemos afirmar que existen dichos números.

Finalmente, podemos decir que, por Teorema de Valor Intermedio, hay al menos tres raíces de f en $[-1,3]$ y por lo tanto al menos tres soluciones a la ecuación $x^3-3x^2+1=0$. No, obstante, debe percatarse del hecho de que la ecuación es de grado tres y sabemos [4] que un polinomio de grado n tendrá a lo sumo n raíces reales, no puede tener más. De forma que esta ecuación tiene exactamente tres soluciones y se alojan en el intervalo $[-1,3]$.

Para que se convenza de que los resultados del teorema y que nuestro análisis es correcto, vea la gráfica de la función $f(x)=x^3-3x^2+1$. Observe que todas las raíces, en efecto, se encuentran dentro del intervalo $[-1,3]$ de acuerdo al análisis realizado.



Ejemplo 9: *Halle la recta tangente a la curva $f(x)=x^2$ en el punto $(2,4)$.*

Solución:

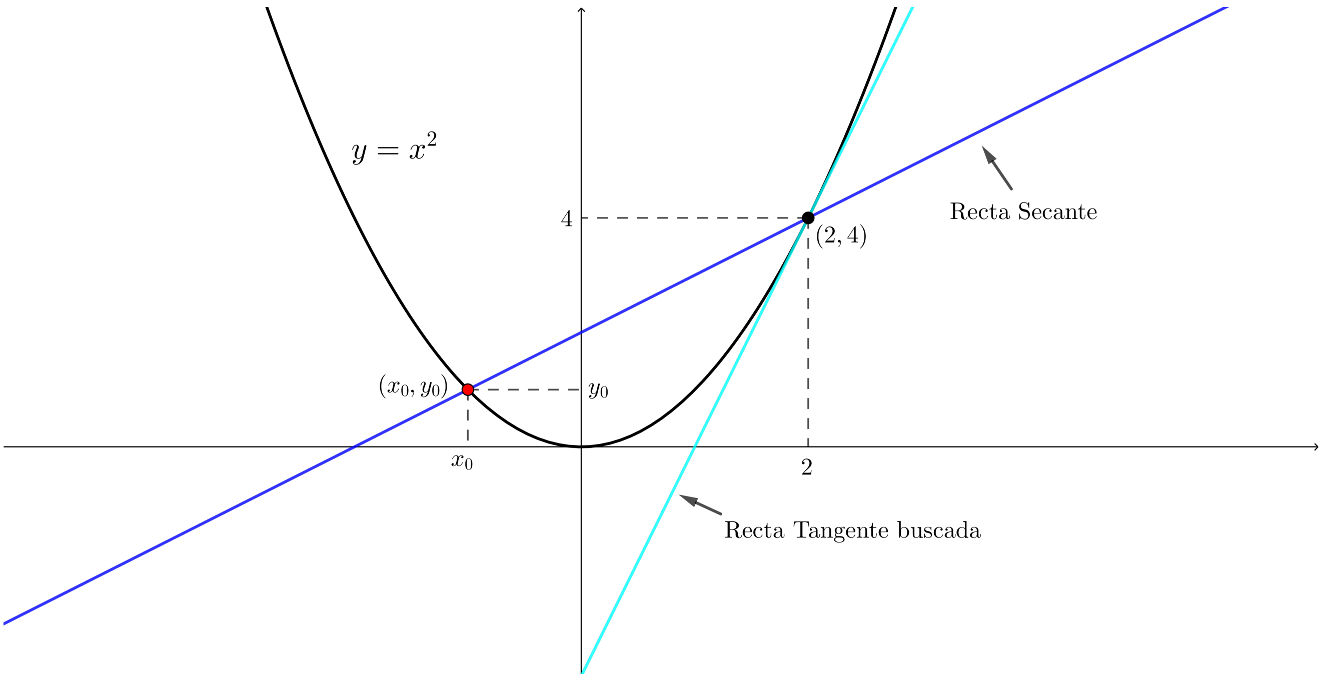
Vea que de entrada nos dicen, indirectamente, que el punto está sobre la curva, de otra forma el enunciado sería incongruente. Sin embargo, no es difícil comprobar que en efecto es así:

$$f(x=2)=(2)^2=4 \qquad \text{El punto si está sobre la curva.}$$

[4] Consecuencia del Teorema Fundamental del Álgebra

Por otro lado, de nuestros estudios de geometría durante este curso, sabemos que para construir la ecuación de una recta son suficientes: Un punto sobre la recta y la pendiente, o dos puntos sobre la recta, por lo tanto, es evidente que con la información que tenemos no podemos resolver este problema de la forma usual, requerimos otro enfoque.

Considere la gráfica de $y = f(x)$ y considere también la recta secante que pasa por el punto $(2, 4)$ y por un punto cualquiera que llamaremos (x_0, y_0), cuya única propiedad es que está sobre la curva $y = f(x)$.



Calculemos la pendiente de la recta secante de la figura de la forma que ya conocemos:

$$m_{sec} = \frac{y_0 - 4}{x_0 - 2}$$

Recuerde que el punto (x_0, y_0) está sobre la curva $y = x^2$, por lo tanto se satisface $y_0 = x_0^2$, entonces:

$$m_{sec} = \frac{y_0 - 4}{x_0 - 2} = \frac{x_0^2 - 4}{x_0 - 2}$$

Esta última expresión representa la pendiente las rectas secantes a $y = f(x)$, en función de x_0.

Ahora preste atención al siguiente razonamiento: Hagamos que x_0 se acerque tanto como queramos a 2 ¿ Qué pasaría entonces con y_0?

Pues la respuesta es muy fácil de dar. Ya que $y_0 = x_0^2$, si x_0 se aproxima a 2 entonces y_0 se aproximará a 4. En otras palabras, si hacemos que x_0 tienda a 2 entonces estaremos aproximando al punto (x_0, y_0) al $(2,4)$, a través de la curva $y = x^2$ ¿ Qué pasaría entonces con la recta secante que pasa por el punto (x_0, y_0) y $(2,4)$?

A medida que el punto (x_0, y_0) se aproxime al $(2,4)$, la recta secante se parecerá más a la recta tangente que buscamos, en otras palabras, la pendiente de la recta secante será *casi* igual a la de la recta tangente. Sin embargo, si permitimos a x_0 aproximarse tanto como se quiera a 2, justo en el límite cuando x_0 tiende 2, la pendiente de la recta secante será igual a la de la recta tangente.

Todo lo que hemos dicho, lo escribimos en ecuaciones de la siguiente manera:

$$\lim_{x_0 \to 2} m_{sec} = m_{tan}$$

Este es un límite que para usted es sencillo de calcular.

$$m_{tan} = \lim_{x_0 \to 2} \frac{x_0^2 - 4}{x_0 - 2} = \lim_{x_0 \to 2} \frac{(x_0 - 2)(x_0 + 2)}{x_0 - 2} = \lim_{x_0 \to 2} x_0 + 2 = 4$$

Nota. En los próximos ejercicios de este curso se dará cuenta que este resultado no es más que la derivada de $y = x^2$ en el punto 2.

Ya hemos obtenido la pendiente de la recta tangente [5] y, con el punto de tangencia, tenemos suficiente información para hallar su ecuación.

Aplicamos la ecuación Punto-Pendiente:

$$y - 4 = 4(x - 2) \Longrightarrow y - 4 = 4x - 8 \Longrightarrow 4x - y - 4 = 0$$

Finalmente la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto $(2,4)$ es $\mathbf{4x - y - 4 = 0}$.

Con este ejercicio se quiere que usted jamás olvide que la derivada de una función en algún punto es igual a la pendiente de la recta tangente a dicha función en ese punto.

[5] Y resuelto uno de los problemas históricos más importantes de las matemáticas “El problema de la recta tangente a una curva”. Resuelto en el siglo XVII, independientemente, por Newton y Leibniz.

Bibliografía.

- **Demidovich, B.** (1967). *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*(2a. ed.). Moscú: Editorial Mir.
- **Dennis, G. Zill y Warren, S. Wright.** (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (4a. ed.).México, D. F.: McGraw Hill.
- **Valera, M. T.** *Guías de Ejercicios.* Universidad Simón Bolívar.
- **Guzmán M.A.** (2014). *Guía de Ejercicios de Matemáticas 1 con Soluciones.* Universidad Simón Bolívar.

Este material fue, resuelto y tipeado en LaTeX por Miguel Ángel Labrador para uso de toda la comunidad académica. Algunos ejercicios fueron tomados de parciales realizados en cursos de MA-1111 de la Universidad Simón Bolívar.

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección **miguelangel2801@gmail.com**.

Este material se actualizó por última vez en **diciembre de 2017**.