Universidad Simón Bolívar
Matemáticas I (MA-1111)
Segundo Examen Parcial

Elaborado por: Miguel Ángel Labrador
Ingeniería Electrónica
Carnet: 12-10423
Correo: miguelangel2801@gmail.com
Twitter: @miguelangel2801

PREPARADURÍA Nº 3

Matemáticas I (MA-1111)

Funciones.

Dominio, rango, composición de funciones y función inversa.

Ejemplo 1: *Halle el dominio de la función* :

$$\sqrt[3]{\sin(x)} + \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{1 - \mid x + 2 \mid}$$

Solución:

Es bueno que antes de empezar a trabajar con funciones usted se sepa las funciones más básicas junto con su respectivo dominio, rango y gráfica. (Puede consultar Precálculo de James Stewart 6ta edición, capítulo 2.)

Dominio de una función.

El dominio de una función es el conjunto de valores que puede «leer» una función, es decir, aquellos valores para lo cuales la función está definida.

Como tenemos que hallar el dominio de la suma de tres funciones hallamos primero el dominio de cada una de ellas y luego los intersecamos, la razón es que los valores que podrá leer $f(x)$ deben ser leídos también, sin problema, por cada función.

Dominio de $\sqrt[3]{\sin(x)}$:

Comencemos nuestro análisis desde la función más interna. La pregunta que debemos hacernos es ¿ qué valores puede leer $\sin(x)$? y luego ¿ qué valores arroja $\sin(x)$ y que valores puede leer una función $\sqrt[3]{x}$?

Las funciones seno y coseno están definidas en $\mathbb{R}$ por lo tanto no hay problema con evaluar cualquier valor en $\sin(x)$ luego esta función arroja valores entre -1 y 1. Como esta función está dentro de una raíz cúbica cuyo dominio es $\mathbb{R}$ no hay problema con evaluar cualquier número en $\sqrt[3]{\sin(x)}$.

Entonces el dominio de $\sqrt[3]{\sin(x)}$ es $\mathbb{R}$.

Dominio de $\sqrt{x^2-4}$: Note que dentro de la raíz hay un polinomio de segundo grado, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ sin embargo lo que está dentro de una raíz debe ser siempre mayor o igual a cero para que esta esté definida, por lo tanto:

$$\begin{aligned} & x^2-4 \geqslant 0 \qquad \text{(Debemos analizar en que conjunto se cumple esta desigualdad.)} \\ \Longleftrightarrow & x^2 \geqslant 4 \\ \Longleftrightarrow & \mid x \mid \geqslant 2 \\ \Longleftrightarrow & x \leqslant -2 \quad ó \quad x \geqslant 2 \end{aligned}$$

Luego x^2-4 es positivo o cero en $(-\infty,-2] \cup [2,\infty)$, lo que se esperaba de una parábola trasladada 4 unidades hacia abajo, de modo que este conjunto es el dominio de esta función.

Dominio de $\sqrt{1- \mid x+2 \mid}$:

Otra vez, como se trata de una función valor absoluto que tiene dominio $\mathbb{R}$ lo que necesitamos ver es para qué valores de $\mathbb{R}$, por ser una raíz cuadrada, se cumple que:

$$\begin{aligned} & 1- \mid x+2 \mid \geqslant 0 \\ \Longleftrightarrow\ & 1 \geqslant \mid x+2 \mid \\ \Longleftrightarrow\ & 1 \geqslant (x+2)^2 \\ \Longleftrightarrow\ & 1 \geqslant x^2+4x+4 \\ \Longleftrightarrow\ & x^2+4x+3 \leqslant 0 \Longleftrightarrow (x+3)(x+1) \leqslant 0 \end{aligned}$$

	$(-\infty,-3]$	$[-3,-1]$	$[-1,\infty)$
$x+3$	-	+	+
$x+1$	-	-	+
$1- \mid x+2 \mid$	+	-	+

Luego el conjunto donde se cumple $1- \mid x+2 \mid \geqslant 0$ es $[-3,-1]$, por lo tanto este es su dominio.

Finalmente el dominio de $f(x)$ está dado por:

$$\text{Domf} = \mathbb{R} \cap (-\infty,-2] \cup [2,\infty) \cap [-3,-1] = [-3,-2]$$

Observe que si usted evalúa la función fuera del conjunto que obtuvimos por dominio obtendrá que por lo menos una de las tres funciones no está definida.

Ejemplo 2: *Dadas las funciones* :

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = \begin{cases} x+3 & ,\text{si } x < 2 \\ \sqrt{x-2} & ,\text{ si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

a. Bosqueje las gráficas de f y g por separado.

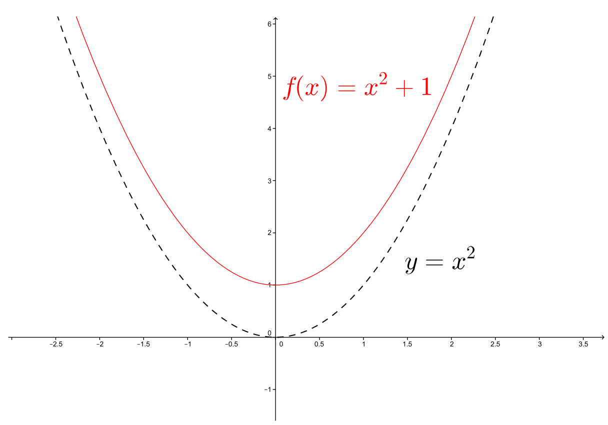
b. Halle el dominio de ambas funciones.

c. Halle $(g \circ f)(x)$.

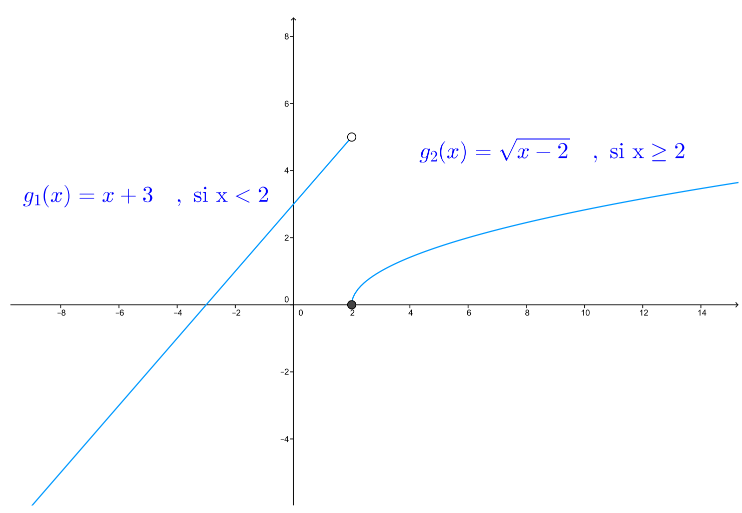
Solución:

Parte a: Para bosquejar una función sencilla se puede comenzar de la gráfica de una función base y aplicar traslación y reflexión de funciones. Para f, observe que no es más que x^2 trasladada hacia arriba una unidad. (Se insiste en que si usted no conoce esto debe consultar la bibliografía recomendada al principio.)

Para una función a trozos se puede graficar cada trozo independientemente dentro del dominio especificado, es decir, podemos graficar $x + 3$ sobre todo $\mathbb{R}$ y luego solo conservamos el «trozo» que se encuentra dentro del intervalo $(-\infty, 2)$ sin incluir al dos, note que en el bosquejo aparece un punto abierto.



(a) Función $f(x)$.



(b) Función $g(x)$.

Parte b: Cuando tenemos una función sin que nos especifiquen su dominio, por convención decimos que el dominio de la función es el dominio de la expresión que depende de x.

Para f, como la expresión que depende de x es un polinomio entonces su dominio son todos los números reales:

$$\text{Domf} = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Esto también lo podemos ver expresado en el bosquejo.

Para g, como tenemos especificado el dominio dentro de la función decimos que:

$$\text{Domg} = (-\infty, 2) \cup [2, \infty) = \mathbb{R}$$

Parte c: Al momento de realizar una composición de funciones debemos verificar que dicha composición esté definida

Composición de funciones.

Dadas dos funciones f y g la composición $(f \circ g)(x)$ está definida por

$$f\left(g(x)\right)$$

siempre que $Domf \cap Rang \neq \varnothing$.

La última línea significa que x debe pertenecer al dominio de g y los valores que arroja $g(x)$ deben estar incluidos en el dominio de f.

Nos piden que hagamos la composición $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$, de modo que ahora donde hay alguna x en la función g debemos reemplazarla por $f(x)$.

$$g(x) = \begin{cases} x+3 & \text{,si } x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{, si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{g\circ f} \quad g\left(f(x)\right) = \begin{cases} f(x)+3 & \text{, si } f(x) < 2 \text{ y } x \in Domf \quad \text{(I)} \\ \sqrt{f(x)-2} & \text{, si } f(x) \geqslant 2 \text{ y } x \in Domf \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Observe como se define ahora el dominio de la nueva función resultado de la composición. Fíjese que, por ejemplo, para que $f(x)+3$ esté bien definida se tiene que cumplir que $f(x) < 2$ «y» al mismo tiempo x debe pertenecer al dominio de f, la razón es que si alguna de estas dos condiciones no se cumplen para algún x debemos asegurarnos que este no esté incluido en «trozo».

Luego le damos forma de conjunto a los trozos donde se define $g \circ f$.

Para (I):

$$f(x) < 2 \quad y \quad x \in Domf \iff x^2+1 < 2 \quad y \quad x \in \mathbb{R}$$

Debe saber interpretar lo que estamos haciendo, tenemos dos condiciones que x debe cumplir al mismo tiempo (eso es lo que significa «y») lo que interpretamos como una intersección entre dos conjuntos, uno de los conjuntos es $\mathbb{R}$ y el otro nos lo dará la desigualdad.

$$x^2+1 < 2 \iff x^2-1 < 0 \iff x \in [-1, 1]$$

de modo que:

$$
\begin{aligned}
& x^2+1<2 \quad y \quad x \in \mathbb{R} \\
\Longleftrightarrow & x \in(-1,1) \quad y \quad x \in \mathbb{R} \\
\Longleftrightarrow & x \in(-1,1) \cap \mathbb{R} \\
\Longleftrightarrow & x \in(-1,1) && \text{Aquí es donde está definido el primer trozo.}
\end{aligned}
$$

Para (II):

$$
\begin{aligned}
& f(x) \geqslant 2 \quad y \quad x \in Dom f \\
\Longleftrightarrow & x^2+1 \geqslant 2 \quad y \quad x \in \mathbb{R} \\
\Longleftrightarrow & x^2-1 \geqslant 0 \quad y \quad x \in \mathbb{R} && \text{Suponemos que usted ya sabe como resolver desigualdades sencillas como esta.} \\
\Longleftrightarrow & x \in(-\infty,-] \cup[1,+\infty) \quad y \quad x \in \mathbb{R} \\
\Longleftrightarrow & x \in(-\infty,-1] \cup[1,+\infty) && \text{Aquí está definido el segundo trozo.}
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
g(f(x))= \begin{cases}f(x)+3 & \text{, si } f(x)<2 \text{ y } x \in Dom f \\ \sqrt{f(x)-2} & \text{, si } f(x) \geqslant 2 \text{ y } x \in Dom f\end{cases}
$$

$$
\Longrightarrow g(f(x))= \begin{cases}f(x)+3 & \text{, si } x \in(-1,1) \\ \sqrt{f(x)-2} & \text{, si } x \in(-\infty,-1] \cup[1,+\infty)\end{cases} \qquad \text{Recordemos que } f(x)=x^2+1
$$

$$
\Longrightarrow g(f(x))= \begin{cases}x^2+4 & \text{, si } x \in(-1,1) \\ \sqrt{x^2-1} & \text{, si } x \in(-\infty,-1] \cup[1,+\infty)\end{cases} \qquad \text{Forma final de la composición}
$$

También podemos escribir $g(f(x))$ de la siguiente manera:

$$
g(f(x))=(g \circ f)(x)= \begin{cases}x^2+4 & \text{, si } -1<x<1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{, si } x \leqslant-1 \quad ó \quad x \geqslant 1\end{cases}
$$

Ejemplo 3: *Halle* $(f \circ g)(x)$ *si*:

$$
f(x)= \begin{cases}1-x & \text{, si } x<5 \\ x & \text{, si } x \geqslant 5\end{cases} \qquad y \qquad g(x)= \begin{cases}x^2 & \text{, si } x<0 \\ -x^2 & \text{, si } x \geqslant 0\end{cases}
$$

Solución: Acá solo nos piden hacer la composición, procederemos de la misma forma que en el ejemplo anterior:

Antes que nada veamos que el dominio de la dos funciones es $\mathbb{R}$. Además nombramos a cada trozo de la función $g(x)$ de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{si } x < 0 \qquad g_1(x) \\ -x^2 & , \text{si } x \geqslant 0 \qquad g_2(x) \end{cases}$$

Como se pide $(f \circ g)(x) = f\,(g(x))$, reemplazamos a x, en f, por $g(x)$.

$$f\,(g(x)) = \begin{cases} 1 - g(x) & , \text{si } g(x) < 5 \text{ y } x \in \text{Domg} \\ g(x) & , \text{si } g(x) \geqslant 5 \text{ y } x \in \text{Domg} \end{cases}$$

Como $g(x)$ también es una función a trozos debemos sustituir sus trozos en la nueva función de modo que:

$$f\,(g(x)) = \begin{cases} 1 - g_1(x) & , \text{si } g_1(x) < 5 \text{ y } x \in \text{Domg}_1 \\ 1 - g_2(x) & , \text{si } g_2(x) < 5 \text{ y } x \in \text{Domg}_2 \\ g_1(x) & , \text{si } g_1(x) \geqslant 5 \text{ y } x \in \text{Domg}_1 \\ g_2(x) & , \text{si } g_2(x) \geqslant 5 \text{ y } x \in \text{Domg}_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - x^2 & , \text{si } x^2 < 5 \text{ y } x \in \text{Domg}_1 \qquad (\text{I}) \\ 1 - (-x^2) & , \text{si } -x^2 < 5 \text{ y } x \in \text{Domg}_2 \qquad (\text{II}) \\ x^2 & , \text{si } x^2 \geqslant 5 \text{ y } x \in \text{Domg}_1 \qquad (\text{III}) \\ -x^2 & , \text{si } -x^2 \geqslant 5 \text{ y } x \in \text{Domg}_2 \qquad (\text{IV}) \end{cases}$$

Ahora, como siempre, el problema es averiguar cómo son los intervalos donde está definida la nueva función.

Para (I):

$$x^2 < 5 \quad y \quad x \in \text{Domg}_1$$

Note que $\text{Domg}_1 = (-\infty, 0)$ ya que nos han especificado que $x < 0$ por lo tanto:

$$\begin{aligned} & x^2 < 5 \quad y \quad x \in \text{Domg}_1 \\ \Longleftrightarrow & x^2 < 5 \quad y \quad x \in (-\infty, 0) \end{aligned}$$

Por otro lado la desigualdad $x^2 < 5$ se puede resolver de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & x^2 < 5 \\ \Longleftrightarrow & \mid x \mid < \sqrt{5} \\ \Longleftrightarrow & -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \end{aligned}$$

De modo que $x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$. Entonces:

$$\begin{aligned}
& x^2 < 5 \quad y \quad x \in (-\infty, 0) \\
\iff & x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \quad y \quad x \in (-\infty, 0) \\
\iff & x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \cap (-\infty, 0) \\
\iff & x \in (-\sqrt{5}, 0) && \text{Dominio del primer trozo.}
\end{aligned}$$

Para (II): Análogo al caso anterior $\mathrm{Domg}_2 = [0, \infty)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
& -x^2 < 5 \quad y \quad x \in \mathrm{Domg}_2 \\
\iff & -x^2 < 5 \quad y \quad x \in [0, \infty)
\end{aligned}$$

Antes de empezar a resolver la desigualdad note que $-x^2 < 5 \iff x^2 > -5 \iff x^2 + 5 > 0$ y la expresión que tenemos en el miembro izquierdo es siempre mayor que cero para cualquier valor de $\mathbb{R}$ entonces:

$$\begin{aligned}
& -x^2 < 5 \quad y \quad x \in [0, \infty) \\
\iff & x \in \mathbb{R} \quad y \quad x \in [0, \infty) \\
\iff & x \in \mathbb{R} \cap [0, \infty) \\
\iff & x \in [0, \infty) && \text{(Dominio del segundo trozo.)}
\end{aligned}$$

Para (III):

$$\begin{aligned}
& x^2 \geqslant 5 \quad y \quad x \in \mathrm{Domg}_1 \\
\iff & x^2 \geqslant 5 \quad y \quad x \in (-\infty, 0) \\
\iff & x \leqslant -\sqrt{5} \quad ó \quad x \geqslant 5 \quad y \quad x \in (-\infty, 0) \\
\iff & x \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \infty) \quad y \quad x \in (-\infty, 0) \\
\iff & x \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \infty) \cap (-\infty, 0) \\
\iff & x \in (-\infty, -\sqrt{5}] && \text{(Dominio del tercer trozo.)}
\end{aligned}$$

Para (IV):

$$\begin{aligned}
& -x^2 \geqslant 5 \quad y \quad x \in \mathrm{Domg}_2 \\
\iff & 0 \geqslant x^2 + 5 \quad y \quad x \in [0, +\infty) \\
\iff & x^2 + 5 \leqslant 0 \quad y \quad x \in [0, +\infty) && \text{(Un número positivo no es menor que cero.)} \\
\iff & x \in \varnothing \quad y \quad x \in [0, +\infty) \\
\iff & x \in \varnothing \cap [0, +\infty) \\
\iff & x \in \varnothing && \text{(Dominio del cuarto trozo.)}
\end{aligned}$$

Note que el cuarto trozo no está definido para ningún número por lo tanto podemos prescindir de él y la nueva función nos queda de la siguiente manera.

$$f\left(g(x)\right) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{, si } x \in (-\sqrt{5},0) \qquad \text{(I)} \\ 1-(-x^2) & \text{, si } x \in [0,\infty) \qquad \text{(II)} \\ x^2 & \text{, si } x \in (-\infty,-\sqrt{5}] \qquad \text{(III)} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-x^2 & \text{, si } x \in (-\sqrt{5},0) \qquad \text{(I)} \\ 1+x^2 & \text{, si } x \in [0,\infty) \qquad \text{(II)} \\ x^2 & \text{, si } x \in (-\infty,-\sqrt{5}] \qquad \text{(III)} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 & \text{, si } x \in (-\infty,-\sqrt{5}] \qquad \text{(III)} \\ 1-x^2 & \text{, si } x \in (-\sqrt{5},0) \qquad \text{(I)} \\ 1+x^2 & \text{, si } x \in [0,\infty) \qquad \text{(II)} \end{cases} \qquad \text{(Colocamos los trozos en orden.)}$$

Finalmente podemos escribir este resutado de la siguiente manera:

$$(f\circ g)(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, si } x \leqslant -\sqrt{5} \\ 1-x^2 & \text{, si } -\sqrt{5} < x < 0 \\ 1+x^2 & \text{, si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Ejemplo 4: *Diga si es verdadero o falso que la inversa de* $f(x) = \dfrac{-x}{x+1}$ *es ella misma.*

Solución:

Cuando demos hallar la inversa de alguna función, es imprescindible que verifiquemos si la función es inyectiva si no nos lo dicen de antemano:

Función inyectiva.

Una función con dominio A se llama función inyectiva si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, es decir

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{siempre} \quad \text{que} \quad \mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$$

También es equivalente decir que si hay dos elementos de A que tengan la misma imagen entonces estos elementos deben ser iguales, es decir

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{siempre} \quad \text{que} \quad \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$$

Usando la definición de función inyectiva veamos si f es una de ellas, para ello definimos lo siguiente:

Sean a y b dos elementos pertenecientes a Domf$= \mathbb{R} - \{-1\}$, entonces si f es inyectiva se debe cumplir que:

$$\text{Si} \quad f(a) = f(b) \quad \text{entonces} \quad a = b \qquad \text{(Esta es la defínción de funcion inyectiva.)}$$

Demostremos si esto se cumple o no:

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ \Longrightarrow \frac{-a}{a+1} &= \frac{-b}{b+1} \\ \Longrightarrow -a(b+1) &= -b(a+1) \\ \Longrightarrow -ab - a &= -ba - b \\ \Longrightarrow -a &= -b \\ \Longrightarrow a &= b \end{aligned} \qquad \text{(Hemos llegado a que } f \text{ es inyectiva.)}$$

Hemos verificado que f **es inyectiva por lo tanto debe tener inversa**.

Función inversa.

Sea f una función inyectiva con dominio A y rango B. Entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A y además está definida por:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$$

para cualquier y en B.

Para hallar la inversa de una función inyectiva se siguen los tres siguientes pasos:

1. Escriba la función igualada a y , es decir, $y = f(x)$.
2. Despeje de x de la ecuación obtenida.
3. Intercambie x e y. Lo que le quedará es $y = f^{-1}(x)$.

Apliquemos estos pasos para encontrar la inversa de f.

Primero escribimos $y = f(x)$, es decir,

$$y = \frac{-x}{x+1} \qquad \text{(Primer paso.)}$$

Luego despejamos x de esta ecuación:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-x}{x+1} \\ \Longrightarrow (x+1)y &= -x \\ \Longrightarrow xy + y &= -x \\ \Longrightarrow xy + x &= -y \\ \Longrightarrow x(y+1) &= -y \\ \Longrightarrow x &= \frac{-y}{y+1} \qquad \text{(Segundo paso.)} \end{aligned}$$

Ahora intercambiamos x y y

$$x = \frac{-y}{y+1} \qquad x \longleftrightarrow y \qquad y = \frac{-x}{x+1} \qquad \text{(Tercer paso.)}$$

Lo que hemos obtenido en el miembro derecho de la última expresión no es más que $f^{-1}(x)$.

Por lo tanto $f^{-1}(x) = \dfrac{-x}{x+1}$

De modo que sí es cierto que la inversa de f es ella misma.

Otra forma de hacer el ejercicio o en este caso de verificar que lo que hemos hecho está bien es aplicar la siguiente propiedad.

Propiedades de las funciones inversas.

Sea f una función inyectiva con dominio A y rango B. La función inversa f^{-1} satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left(f \circ f^{-1}\right)(x) &= f\left(f^{-1}(x)\right) = x \\ \left(f^{-1} \circ f\right)(x) &= f^{-1}\left(f(x)\right) = x \end{aligned}$$

Cualquier par de funciones que satisfagan estas propiedades son inversas entre sí.

De modo que si la inversa de f es ella misma entonces cuando hagamos $(f \circ f)(x)$ debemos obtener la variable independiente.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{-f(x)}{f(x)+1} =$$

$$= \frac{-\left(\dfrac{-x}{x+1}\right)}{\dfrac{-x}{x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{-x+x+1}{x+1}} = \frac{x(x+1)}{x+1} = x \qquad \text{(Obtuvimos la variable independiente.)}$$

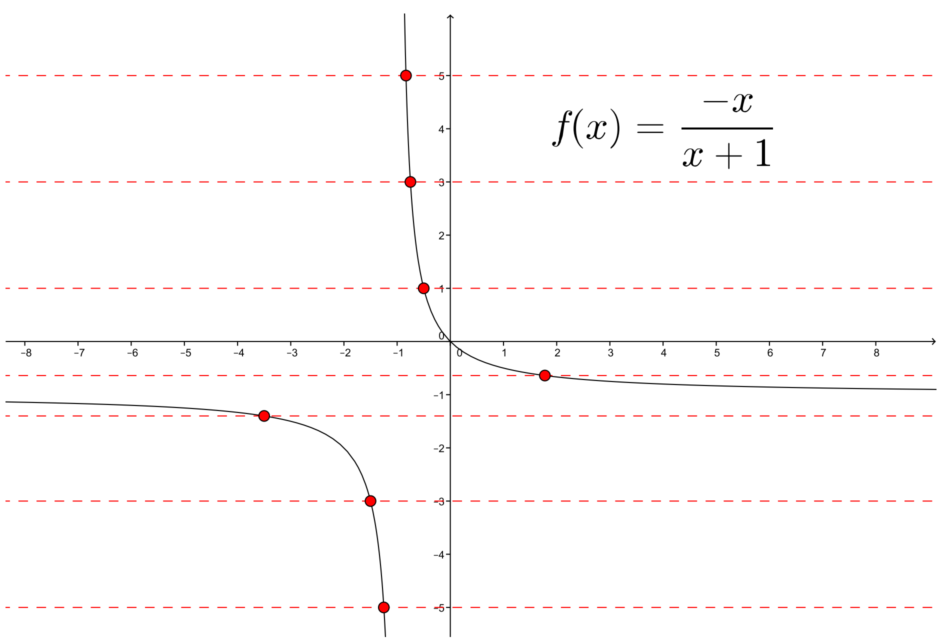
Como $(f \circ f)(x) = x$ entonces la inversa de f es ella misma.

Otra manera de saber si una función es inyectiva y tiene inversa es con la siguiente prueba:

Prueba de la línea horizontal.

Una función es inyectiva si al pasar una línea horizontal imaginaria por su gráfica esta la corta una y solo una vez.

Veamos que esto se cumple para la gráfica de la función que acabamos de estudiar. (Las gráficas de funciones racionales complicadas como la que estudiamos en este ejemplo no son triviales, su construcción se estudia a fondo para el tercer parcial).



Bibliografía.

- **Demidovich, B.** (1967). *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*(2a. ed.). Moscú: Editorial Mir.
- **Dennis, G. Zill y Warren, S. Wright.** (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (4a. ed.).México, D. F.: McGraw Hill.
- **Valera, M. T.** *Guías de Ejercicios.* Universidad Simón Bolívar.
- **Guzmán M.A.** (2014). *Guía de Ejercicios de Matemáticas 1 con Soluciones.* Universidad Simón Bolívar.

Este material fue, resuelto y tipeado en LaTeX por Miguel Ángel Labrador para uso de toda la comunidad académica. Algunos ejercicios fueron tomados de parciales realizados en cursos de MA-1111 de la Universidad Simón Bolívar.

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección **miguelangel2801@gmail.com**.

Este material se actualizó por última vez en **diciembre de 2017**.