Universidad Simón Bolívar
Matemáticas I (MA-1111)
Segundo Examen Parcial

Elaborado por: Miguel Ángel Labrador
Ingeniería Electrónica
Carnet: 12-10423
Correo: miguelangel2801@gmail.com
Twitter: @miguelangel2801

PREPARADURÍA Nº 10

Matemáticas I (MA-1111)

Regla de L'Hopital, Optimización, Teoremas.

Límites por L'Hopital, Optimización, Teorema de Valor Medio para Derivadas y Teorema de Rolle.

Ejemplo 1: Calcule, si existe, el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan(x)}{x\sin(x)}$$

Solución:

Tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Utilizaremos la *Regla de L'hopital*.

Primero, vea que la función del límite se puede ver como el cociente entre dos funciones:

$$h(x) = \frac{x - \arctan(x)}{x\sin(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

La función f y la función g son derivables en todo $\mathbb{R}$ por las razones que usted bien conoce (son combinación de funciones derivables).

Calculamos las derivadas de cada función:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \qquad g'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$$

Luego:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{1+x^2}}{\sin(x) + x\cos(x)} \qquad \text{(Indeterminación del tipo } \tfrac{0}{0}.\text{)}$$

Como aún persiste la indeterminación y la función de numerador y el denominador son derivables en $\mathbb{R}$ calculamos las derivadas de cada función:

$$f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad\qquad g''(x) = 2\cos(x) - x\sin(x)$$

Luego:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}}{2\cos(x) - x\sin(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

De modo que el límite existe y vale cero, en consecuencia, por la *Regla de L'Hopital*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

De manera que, finalmente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan(x)}{x\sin(x)} = 0$$

Ejemplo 2: Calcule, si existe, el límite

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)$$

Solución:

Tenemos una indeterminación del tipo $0.\infty$.

Ya hemos visto anteriormente que las indeterminaciones pueden ser «transformadas » a través de procedimientos algebraicos.

$$0.\infty \longrightarrow \begin{cases} 0.\left(\dfrac{1}{0}\right) \longrightarrow \dfrac{0}{0} \\[2ex] \left(\dfrac{1}{\infty}\right).\infty \longrightarrow \dfrac{\infty}{\infty} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\dfrac{\pi}{4} - \arctan\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\right)}{\dfrac{1}{x}} \qquad (\text{Indeterminación } \tfrac{0}{0})$$

Para utilizar la Regla de L'Hopital aplicamos un cambio de variables.

$$y = \frac{1}{x} \qquad y \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow x \longrightarrow +\infty$$

De modo que nos queda:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{\pi}{4} - \arctan\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\right)}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{\pi}{4} - \arctan\left(\dfrac{1}{1+y}\right)}{y}$$

Si consideramos:

$$h(y) = \frac{f(y)}{g(y)} = \frac{\dfrac{\pi}{4} - \arctan\left(\dfrac{1}{1+y}\right)}{y}$$

Podemos observar que f es derivable en $\mathbb{R} - \{-1\}$ y $g(y)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$. Calculamos las derivadas de ambas funciones:

$$f'(y) = -\frac{\left(\dfrac{1}{1+y}\right)'}{1 + \left(\dfrac{1}{1+y}\right)^2} = \frac{\dfrac{1}{(1+y)^2}}{1 + \left(\dfrac{1}{1+y}\right)^2} \qquad\qquad g'(y) = 1$$

Luego:

$$\lim_{y \to 0} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{\dfrac{1}{(1+y)^2}}{1 + \left(\dfrac{1}{1+y}\right)^2}}{1} = \frac{1}{2}$$

De manera que por la Regla de L'Hopital:

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y \to 0} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{\pi}{4} - \arctan\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\right)}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{\pi}{4} - \arctan\left(\dfrac{1}{1+y}\right)}{y} = \frac{1}{2}$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 3: Calcule, si existe, el límite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1-\sin(x)} - \frac{2}{\cos^2(x)}\right)$$

Solución:

Al hacer la evaluación tenemos una indeterminación del tipo $\infty - \infty$.

Manipulamos algebraicamente para llevar a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1-\sin(x)} - \frac{2}{\cos^2(x)}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x) - 2(1-\sin(x))}{(1-\sin(x))\cos^2(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2(x) - 2(1-\sin(x))}{\cos^2(x)(1-\sin(x))}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sin(x))(1-\sin(x)) - 2(1-\sin(x))}{\cos^2(x)(1-\sin(x))} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin(x)-2}{\cos^2(x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)-1}{\cos^2(x)} \qquad \text{(Indeterminación } \tfrac{0}{0}.\text{)}$$

En este punto sería sumamente sencillo quitar la indeterminación pero el ejercicio se presta también para aplicar L'Hopital.

Si definimos:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin(x)-1}{\cos^2(x)}$$

f y g son derivables en $\mathbb{R}$. Calculamos las derivadas de ambas funciones:

$$f'(x) = \cos(x) \qquad g'(x) = -2\cos(x).\sin(x)$$

Luego:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{-2\cos(x).\sin(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2\sin(x)} = -\frac{1}{2}$$

Por la *Regla de L'Hopital*:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{2}$$

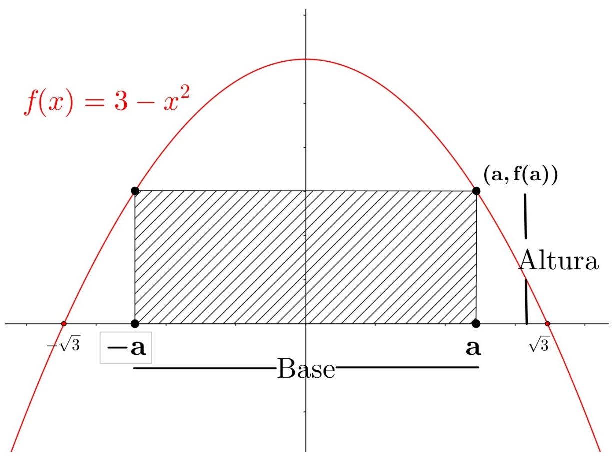
De manera que, finalmente:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-\sin(x)}-\frac{2}{\cos^2(x)}\right)=-\frac{1}{2}$$

Ejemplo 4: Un rectángulo tiene dos vértices sobre el eje x y los otros dos sobre la parábola $f(x)=3-x^2$ ¿ Cuáles son las dimensiones de un rectángulo de este tipo con área máxima?

Solución:

Seguramente usted ya está acostumbrado a que en este tipo de problemas es bueno siempre realizar algún «dibujo» que ayude a ilustrar el problema y las incógnitas.



En los problemas de optimización identifique siempre que es lo que quiere optimizar (maximizar o minimizar). En este problema se piden las dimensiones de un rectángulo de área máxima por lo que tenemos que construir una función que represente el área del rectángulo y luego maximizarla.

Para construir la función que representa el área partimos de lo que ya sabemos: el área de un rectángulo está dado por

$$A_{rect}=Base.Altura$$

Del esquema se ve que la base no es más que la longitud dada por las abscisas señaladas: $Base=2a$.

Como bien nos dice el enunciado, los otros dos vértices del rectángulo están sobre la parábola por lo tanto son puntos de la forma $(a,f(a))$. Luego podemos decir que la altura del rectángulo está dada por : $Altura=f(a)$.

De manera que tenemos:

$$A_{rect}=2a.f(a)=2a(3-a^2)\Longrightarrow A_{rect}(a)=6a-2a^3$$

Cada vez que consigamos la función debemos restringir su dominio para evitar que aparezcan soluciones indeseadas o incongruentes a nuestro problema. Fíjese que a no debe ser nula de lo contrario tenemos que el área es nula también, más aún a debe ser positiva; análogamente, si $a=\sqrt{3}$ el área se anularía para este valor, de manera que $a\in(0,\sqrt{3})$.

$$A_{rect}(a)=6a-2a^3 \quad \text{, si } a\in(0,\sqrt{3})$$

Ahora bien, nos preguntan cuáles son las dimensiones que debe poseer el rectángulo de nuestro problema para que tenga el área más grande posible. Como ya tenemos la función que representa el área para distintos valores de a, la pregunta se reduce a calcular cuál de estos valores de a hacen un rectángulo más grande, lo que a su vez es equivalente a calcular los valores máximos de la función A_{rect}.

Para saber cuáles son los máximos o mínimos de A_{rect} primero derivamos la función y luego igualamos a cero para conocer cuáles son los *puntos estacionarios*:

$$A'_{rect}(a) = 6 - 6a^2$$

Igualamos la derivada a cero:

$$A'_{rect}(a) = 0 \Longrightarrow 6 - 6a^2 = 0 \Longrightarrow 6(1-a)(1+a) = 0 \Longrightarrow a = 1 \quad \acute{o} \quad a = -1$$

Luego $a = 1 \quad y \quad a = -1$ son puntos estacionarios, sin embargo $a = -1$ no está dentro del dominio de nuestra función por lo que nos queda únicamente $a = 1$. Debemos demostrar que en $a = 1$ se alcanza un máximo para dar la respuesta del problema.

Anteriormente para demostrar si algún punto estacionario era un máximo o un mínimo usábamos el *Criterio de la Primera Derivada* porque teníamos un análisis de signos (cementerio) realizado. Como ponerse a hacer un análisis de signos ahora es fastidioso utilizamos el *Criterio de la Segunda Derivada*

Criterio de la Segunda Derivada

Sean f' y f'' definidas en (a,b) y sea $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$

I. Si $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un valor máximo local de f.

II. Si $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un valor mínimo local de f

Lo que nos dice el criterio es que si c es un punto estacionario entonces, cuando calculemos la segunda derivada y la evaluemos en $x = c$, si la segunda derivada nos da positiva en $x = c$ se alcanza un mínimo y si nos da negativa en $x = c$ se alcanza un máximo.

Tenemos que $a = 1$ es un punto estacionario, calculamos la segunda derivada para luego evaluarla en $a = 1$:

$$A''_{rect}(a) = -12a \Longrightarrow A''_{rect}(a = 1) = -12 < 0$$

Luego, por el *Criterio de la Segunda Derivada*, en $a = 1$ se alcanza un máximo local.

Fíjese que $a = 1$ es el único máximo dentro del dominio de A_{rect} de manera que $a = 1$ es el máximo global.

Finalmente, recuerde que las dimensiones del rectángulo son: $Base = 2a$ y $Altura = 3 - a^2$, de modo que para que el rectángulo sea lo más grande posible la dimensiones deben ser:

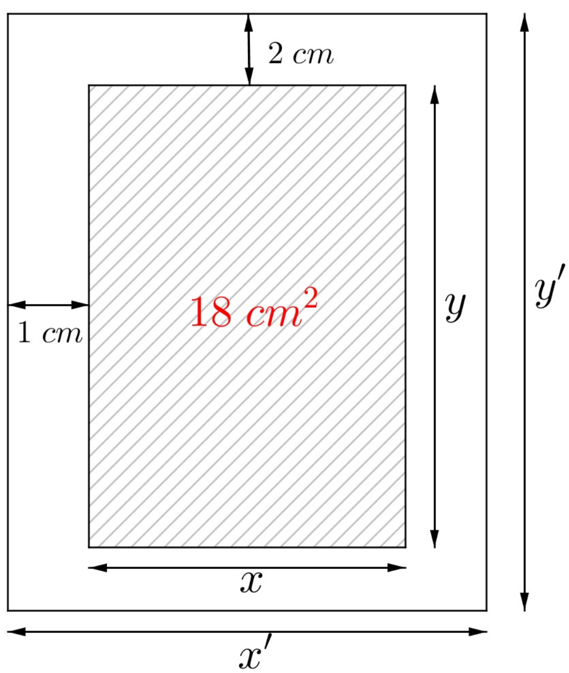
$$Base = 2 \qquad\qquad Altura = 2$$

Ejemplo 5: Una hoja de papel de forma rectangular debe contener 18 cm^2 de texto impreso y debe satisfacer los siguientes requerimientos: los márgenes superior e inferior han de ser de 2 cm cada uno y los laterales de 1 cm cada uno. Calcule las dimensiones de la hoja para que el área de la misma sea mínima.

Solución:

Lo que vamos intentar optimizar en este problema es el área de la hoja que debe llevar un texto impreso, para ello debemos encontrar una expresión que *modele* dicho área.

Observe el esquema que hemos hecho con los datos y las variables del problema.



Note que el área de la hoja está dada por:

$$A_h = x'.y'$$

Debemos escribir esta expresión en función de una sola variable (de las que están en el esquema) para luego restringir su dominio y optimizar la función.

Usualmente en los problemas de optimización se buscan dos relaciones: una relación que modele lo que se va a optimizar y otra que relacione las variables para escribir la primera en función de una sola de estas variables.

Vea que podemos escribir y' y x' en función de x y y:

$$y' = y + 4\ cm \qquad x' = x + 2\ cm$$

De modo que ahora podemos escribir el área de la siguiente manera:

$$A_h = x'.y' = (x + 2)(y + 4)$$

Esta es la relación describe el área de la hoja. Debemos buscar una relación entre x y y para poder escribir A_h en función de una sola variable.

Usamos el dato dado por el enunciado:

$$x.y = 18\ cm^2 \qquad \text{(Área de la región impresa)}$$

$$x.y = 18 \Longrightarrow y = \frac{18}{x}$$

Ahora escribimos el área en función de x únicamente:

$$A_h(x) = (x+2)\left(\frac{18}{x}+4\right) = 4x + \frac{36}{x} + 26$$

Esta función está restringida para valores $x \in (0, +\infty)$ puesto que x debe ser positiva por tratarse de una longitud.

Derivamos la función:

$$A_h'(x) = 4 - \frac{36}{x^2}$$

Igualamos a cero para encontrar los puntos críticos:

$$A_h'(x) = 0 \Longrightarrow 4 - \frac{36}{x^2} = 0 \Longrightarrow \frac{4x^2-36}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = 3 \quad ó \quad x = -3$$

Como $x = -3$ no pertenece al dominio de la función lo descartamos y nos quedamos con el punto estacionario $x = 3$.

Para ver si es un máximo o un mínimo calculamos la segunda derivada:

$$A_h''(x) = -36\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{72}{x^3} \Longrightarrow A_h''(x=3) = \frac{72}{18} = 4 > 0$$

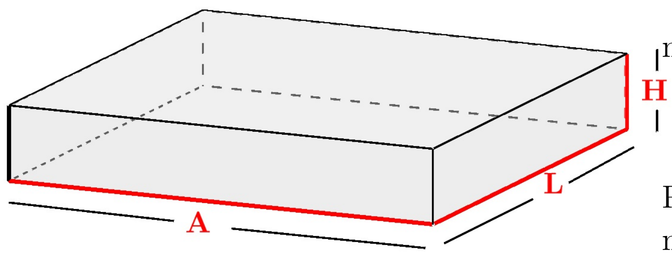
Como $A_h''(3) > 0$, por el *Criterio de la Segunda Derivada*, en $x = 3$ la función alcanza un mínimo local. Como es el único máximo dentro del dominio de la función, se trata del máximo global.

De manera que, finalmente, para que el área de la hoja sea lo más pequeña posible y cumpla con los requerimientos del problema sus dimensiones deben ser:

$$x' = x + 2 = 3 + 2 = 5\ cm \qquad\qquad y' = y + 4 = \frac{18}{x} + 4 = 6 + 4 = 10\ cm$$

Ejemplo 6: Una caja de caramelos se hace a partir de una pieza de cartón que mide 18 *cm* por 18 *cm*. Se cortan cuadrados iguales de cada esquina, y se doblan los lados para formar una caja rectangular. ¿ Cuál es el tamaño del cuadrado que se debe cortar de cada esquina para obtener el máximo volumen?

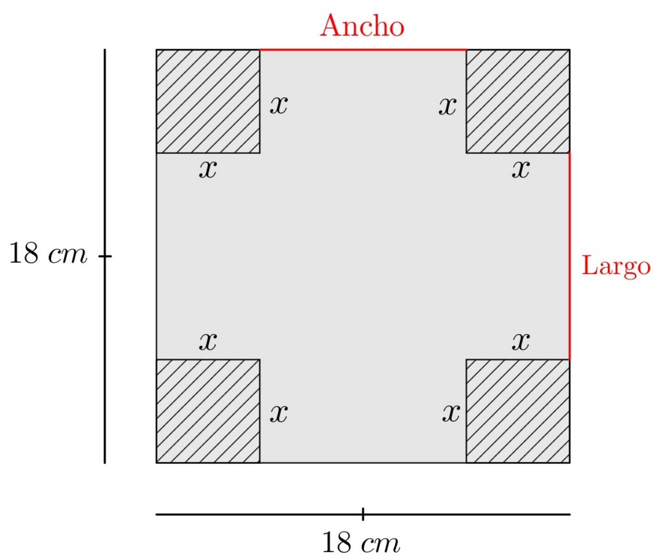
Solución:



El volumen de una caja con dimensiones como las de la figura está está dado por:

$$V_c = A.L.H$$

Para encontrar la función que modele el volumen de esta caja partimos de los datos del problema.



Vea que el problema nos dice que los pedazos cortados son cuadrados por lo que sus dimensiones iguales, además el pedazo de cartón original es cuadrado esto implica que el ancho y el largo de la caja son iguales, por lo tanto podemos escribir el largo o el ancho de la siguiente manera:

$$Ancho = Largo = 18\ cm - 2x$$

Por otro lado la al altura de la caja tiene las mismas longitudes que los lados de los cuadrados cortados. Escribimos el volumen de la caja como sigue:

$$A_v(x) = x.(18-2x)(18-2x) = x(18-2x)^2$$

Teniendo en mente que x representa la longitud de los lados de los cuadrados cortados, fíjese que el dominio de la función A_v está restringido a valores de $x \in (0,9)$. Los valores deben estar entre 0 y 9 puesto que la longitud debe ser positiva y debe ser menor que nueve o de lo contrario los cuadrados cortados serían tan grandes que el volumen de la caja sería nulo. Luego:

$$A_v = x(18-2x)^2 \quad , \text{si } x \in (0,9)$$

Derivamos a función:

$$A_v'(x) = (18-2x)^2 - 4x(18-2x) = (18-2x)(18-6x)$$

Igualamos la derivada a cero para conocer sus puntos críticos:

$$A_v'(x) = 0 \Longrightarrow (18-2x)(18-6x) = 0 \Longrightarrow x = 9 \quad ó \quad x = 3$$

Como $x = 9$ no pertenece al dominio de la función solo nos queda $x = 3$ como único punto crítico. Veamos si es un máximo como se espera.

Para que usted vea que en optimización no es obligatorio usar el *Criterio de la Segunda Derivada*, en este caso usaremos el *Criterio de la Primera Derivada.*

Analizamos el signo de la derivada de A_v:

	$(-\infty, 3)$	$(3, 9)$
$18-2x$	$+$	$+$
$18-6x$	$+$	-
$A_v'(x) =$	$\nearrow$	$\searrow$

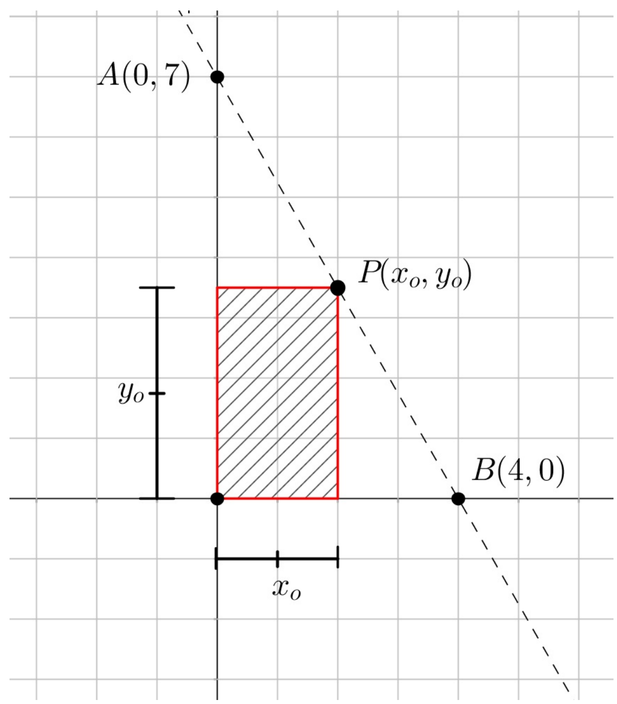
Como A_v es creciente en $(-\infty, 3)$ y decreciente en $(3, 9)$, por *Criterio de la Primera Derivada*, en $x = 3$ se alcanza un máximo local, más aún, en $(0, 9)$ se trata de el máximo absoluto.

Finalmente, el cuadrado que se debe cortar para que la caja sea lo más grande posible debe tener dimensiones 3 *cm* por 3 *cm*.

Ejemplo 7: Un rectángulo tiene un vértice en el origen, los dos lados adyacentes sobre los ejes y el vértice opuesto,P, en el primer cuadrante, sobre la recta que pasa por los puntos $A(0,7)$ y $B(4,0)$. Hallar las coordenadas del punto P de manera que el área del rectángulo sea máxima.

Solución:

Del esquema se puede ver que el rectángulo de la figura tiene dimensiones x_o e y_o ya que uno de sus vértices está sobre en el punto P cuyas coordenadas hemos denotado (x_o, y_o).



Ya que queremos optimizar el área del rectángulo, podemos escribir su área como sigue:

$$A_r = x_o.y_o$$

Por otro lado nos dicen que el punto P está sobre la recta que pasa por el punto A y B.

Calculamos la ecuación de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-7}{4-0} = -\frac{7}{4}$$

Por la ecuación punto-pendiente:

$$y = -\frac{7}{4}(x-4)$$

Como el punto P está sobre la recta entonces:

$$y = -\frac{7}{4}(x-4) \Longrightarrow y_o = -\frac{7}{4}(x_o - 4)$$

Con esto tenemos la relación entre x e y de manera que ahora podemos escribir el área de la siguiente manera:

$$A_r(x_o) = x_o\left(-\frac{7}{4}(x_o-4)\right) = -\frac{7}{4}x_o^2 + 7x_o$$

Recuerde que x_o es la base del rectángulo de manera que para que el área no sea nula $x_o \in (0,4)$.

Derivamos respecto a x_o:

$$A_r'(x_o) = -\frac{7}{2}x_o + 7 = -7\left(\frac{x_o}{2} - 1\right)$$

Igualamos a cero para conocer sus puntos críticos:

$$A_r' = 0 \Longrightarrow -7\left(\frac{x_o}{2} - 1\right) = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Calculamos la segunda derivada:

$$A_r'' = -\frac{7}{2} < 0$$

Como la segunda derivada es menor que cero para, para todo valor de x_o, entonces, por *Criterio de la Segunda Derivada*, en $x_o = 2$ se alcanza un máximo local. Como $A_r(x_o)$ es una función cuadrática en $x_o = 2$ se alcanza el máximo global.

Finalmente, para que el rectángulo tenga el máximo área posible el vértice opuesto al origen debe estar sobre el punto con coordenadas:

$$(x_o, y_o) = \left(x_o, -\frac{7}{4}(x_o - 4)\right) = \left(2, \frac{7}{2}\right)$$

Ejemplo 8: Compruebe las hipótesis del Teorema de Valor Medio para Derivadas, luego determine el valor adecuado para c tal que cumpla la conclusión de dicho teorema para

$$f(x) = \sqrt{1 + \cos(x)} \quad , \text{ en } \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

Solución:

Lo que nos pide el problema es verificar el Teorema de Valor Medio para Derivadas para la función dada en el intervalo indicado.

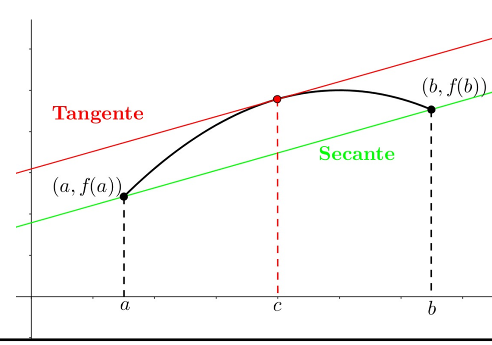
Teorema de Valor Medio para Derivadas.

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces $\exists \quad c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Observe, apoyándose en la figura, lo que quiere decir el teorema.

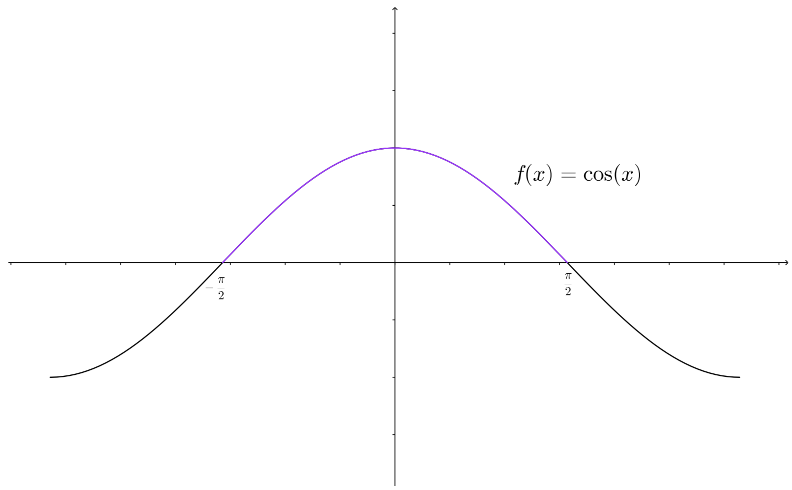
Si se cumplen las hipótesis, entonces existe un valor c tal que hay una recta secante a la curva cuya pendiente es igual a pendiente de una recta tangente a dicha curva en $x = c$.



Verificar las hipótesis del teorema se trata de garantizar que la función f es continua y derivable en el intervalo indicado para así poder afirmar la conclusión del teorema.

Vea que f es composición de dos funciones: una función raíz cuadrada y una función coseno. La función coseno es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ y la función raíz cuadrada es continua en $[0,+\infty)$ y derivable en $(0,+\infty)$. De manera que, para que f sea derivable, se debe cumplir:

$$1+\cos(x)>0$$



Pero como ya sabemos que $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, y la desigualdad se cumple en este intervalo (apóyese en la figura), f es derivable en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (note que no hemos incluido los bordes). Análogamente la función es continua en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Verificadas la hipótesis, debe existir al menos un $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

Para hallar c hallemos ambos miembros de la ecuación anterior.

Calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{-\sin(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}} \Longrightarrow f'(c) = \frac{-\sin(c)}{\sqrt{1+\cos(c)}}$$

Por otro lado:

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \sqrt{1+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}{\pi} = 0$$

De modo que ahora tenemos:

$$f'(c) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} \Longrightarrow \frac{-\sin(c)}{\sqrt{1+\cos(c)}} = 0$$

Para encontrar c debemos despejar esta última ecuación trigonométrica:

$$\frac{-\sin(c)}{\sqrt{1+\cos(c)}} = 0 \Longrightarrow \sin(c) = 0 \Longrightarrow c = 0, \pi, 2\pi, ..., k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$\sin(c) = 0$ siempre que $c = k\pi$ pero como estamos trabajando en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ el valor adecuado está dado por $c = 0$.

Ejemplo 9: Sea $f(x) = |x-1|$ demuestre que hay un valor c tal que:

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0} = f'(c)$$

Solución:

Este ejercicio es parecido al anterior, solo que no nos piden que verifiquemos las hipótesis ni nos dan el intervalo de trabajo. Sin embargo, el intervalo es el $(0,3)$, se puede ver de la «fórmula» de la pendiente de la recta secante dada.

Aunque no lo piden, siempre hay que verificar las hipótesis.

La función $f(x) = |x-1|$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Así pues, la función también es continua en $(0,3)$ pero no es derivable en todo este intervalo pues $x = 1$ está incluido en él.

Finalmente, el teorema es claro y dice que la función deberá ser derivable en *todo* $(0,3)$, luego **no existe** un c tal que:

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0} = f'(c)$$

Ejemplo 10: Demuestre que la ecuación $4x^5 + 3x^3 + 3x - 2 = 0$ tiene una sola raíz en el intervalo $(0,1)$.

Solución:

Anteriormente hemos realizado ejercicios parecidos a este utilizando el *Teorema de Valores Medios* , sin embargo en aquellos ejercicios el enunciado pedía verificar que existía *al menos* una solución acá se pide verificar que *hay una sola* nada más.

Igual que en los ejercicios anteriores empecemos por definir la función $f(x) = 4x^5+3x^3+3x-2$, ya que buscar las soluciones de la ecuación dada es equivalente a buscar las raíces de la función f.

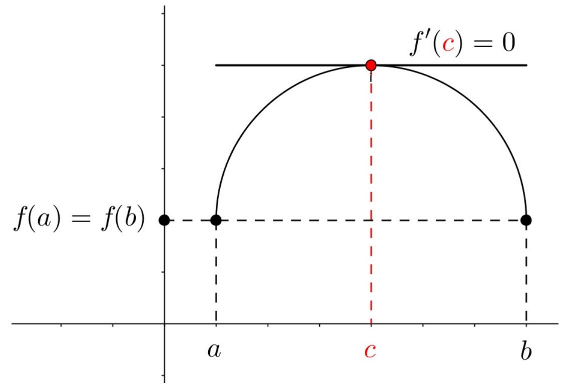
Para dar una idea si en realidad hay una raíz en $(0,1)$ veamos si existe algún cambio de signo en este intervalo:

$$f(0) = -2 \qquad f(1) = 8 \qquad \text{(Hay cambio de signo en } (0,1).)$$

Con esto podemos decir que existe al menos una raíz en $(0, 1)$ ya que f es continua en este intervalo pero para garantizar que existe una y solo una utilizaremos convenientemente el *Teorema de Rolle.*

Teorema de Rolle.

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) además $f(a) = f(b)$ entonces $\exists \quad c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

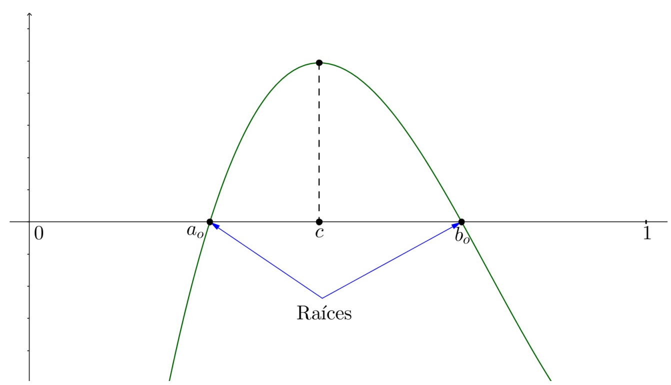


Lo que nos dice el teorema es que si existe un función continua y derivable en un intervalo (a, b) donde $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto estacionario c dentro de (a, b) donde la función alcanza un máximo o un mínimo.

Nos ubicaremos dentro del intervalo $(0, 1)$, pues es allí donde debemos demostrar que hay una sola raíz (Es importante que usted no piense que lo que estamos haciendo aquí forma parte de un procedimiento estándar para resolver este problema). Vamos a considerar todo lo contrario a lo que vamos a demostrar, **supongamos** que existen dos raíces dentro del intervalo $(0, 1)$, llamaremos a estas raíces a_o y b_o. Esto quiere decir que:

$$f(a_o) = 0 \qquad y \qquad f(b_o) = 0$$

Note que $f(a_o) = f(b_o)$, tal como una de las hipótesis del teorema, además la función está definida por un polinomio de manera que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, más aún en $(0, 1)$, por lo tanto por el *Teorema de Rolle* se debe alcanzar un máximo o un mínimo para algún punto $x = c$ dentro del intervalo (a_o, b_o) (así como se ilustra en la figura).



Si esto es cierto entonces deberíamos poder encontrar al menos un punto crítico c dentro de (a_o, b_o) que a su vez está dentro del $(0, 1)$.

Vamos a buscar los puntos críticos de f y verifiquemos si alguno está dentro de $(0, 1)$.

$$f'(x) = 20x^4 + 9x^2 + 3$$

Igualamos a cero:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 20x^4 + 9x^2 + 3 = 0 \qquad \text{(Ecuación sin soluciones reales.)}$$

Como la ecuación no tiene soluciones (cosa que usted debe saber comprobar) no existen puntos críticos.

Que no existan puntos críticos significa que la función no alcanza ningún valor extremo, máximo o mínimo. Sin embargo, el teorema nos garantiza que sí debe existir uno ¿ qué ha fallado? ¿ el teorema? ¿ las hipótesis?

El teorema no ha fallado, lo que ha fallado es la suposición de que hay más de una raíz (a_o y b_o) dentro de $(0, 1)$ y por lo tanto la hipótesis $f(a_o) = f(b_o)$ es falsa.

Luego, **no existe más de una raíz dentro del intervalo $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$**.

Bibliografía.

- **Demidovich, B.** (1967). *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*(2a. ed.). Moscú: Editorial Mir.

- **Dennis, G. Zill y Warren, S. Wright.** (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (4a. ed.).México, D. F.: McGraw Hill.

- **Valera, M. T.** *Guías de Ejercicios.* Universidad Simón Bolívar.

- **Guzmán M.A.** (2014). *Guía de Ejercicios de Matemáticas 1 con Soluciones.* Universidad Simón Bolívar.

Este material fue, resuelto y tipeado en LaTeX por Miguel Ángel Labrador para uso de toda la comunidad académica. Algunos ejercicios fueron tomados de parciales realizados en cursos de MA-1111 de la Universidad Simón Bolívar.

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección **miguelangel2801@gmail.com**.

Este material se actualizó por última vez en **diciembre de 2017**.