GUÍA DE EJERCICIOS # 7

MA – 1111

I.- Determinar los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de las siguientes funciones:

(1) $f(x) = x^4 - 2x^2$ (2) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ (3) $f(x) = x^3(x-6)^4$

(4) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2}$ (5) $f(x) = x^{5/3} + 5x^{2/3}$ (6) $f(x) = \frac{x^2+8x+7}{x-1}$

II.- Determinar los puntos críticos y los máximos y mínimos relativos de las funciones del ejercicio anterior.

III.- Estudiar la concavidad y determinar los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

(1) $f(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{9}{2}x^2 + 2x$ (2) $f(x) = x^6 - 3x^4$ (3) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

(4) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ (5) $f(x) = \frac{4x^2}{x+3}$ (6) $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$

IV.- Hallar los extremos absolutos de las siguientes funciones en el intervalo indicado:

(1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$, $[0,1]$ (2) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 18x + 3$, $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$

(3) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $[0,2]$ (4) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 3$, $[-2,3]$

V.- Determine *a, b* y *c* para que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un valor máximo relativo de 7 en $x = 1$ y la gráfica de $y = f(x)$ pase por el punto (2,-2).

VI.- Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determine *a, b, c* y *d* de manera que f tenga un extremo relativo en (0,3) y que su gráfica tenga un punto de inflexión en (1,-1).

VII.- Resolver los siguientes problemas:

(1) Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 60 y cuyo producto sea máximo.

(2) Encuentre dos números cuyo producto sea -12 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

(3) La diferencia entre dos números es 20. Seleccionar estos números de modo que su producto sea lo más pequeño posible.

Profesora María T. Varela

(4) Una sustancia se distribuye de forma continua sobre el intervalo [0 cm., 10 cm.] del eje x. La concentración viene dada por la función:

$$C(x) = 10x - x^2 \quad (C(x) \text{ medida en } {}^{mg}/_{cm})$$

¿Dónde está situada la máxima concentración?

(5) Un rectángulo tiene 120 metros de perímetro. ¿Qué largo y ancho dan el área máxima?

(6) La suma de la base y la altura de un triángulo es igual a 10 centímetros. ¿Qué tamaño deberá tener la base para que el área del triángulo sea la máxima?

(7) Hallar las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima cuyo perímetro es 12 cm.

(8) Encontrar las coordenadas de los puntos de la curva $x^2 - y^2 = 16$ que están más cerca del punto (0,6).

(9) Encontrar las coordenadas del punto de la curva $y = x^3$ más cercano al punto (4,0)

(10) Se dispone de 1.200 metros de material para cercar un corral rectangular que ya posee un muro de piedra como uno de sus lados. ¿Qué dimensiones debe tener el corral para encerrar la mayor área posible?

(11) Un rectángulo tiene dos vértices en el eje de las x y los otros dos sobre la parábola de ecuación $y = 12 - x^2$, con $y \geq 0$. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de este tipo que tiene la máxima área?

(12) La energía potencial entre dos átomos en una molécula está dada por $U(x) = \frac{2}{x^{12}} - \frac{1}{x^6}$. Encuentre la energía potencial mínima entre los átomos.

(13) Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales en ratas a las que se les administró una dieta que contenía 10% de proteína. La proteína consistió en levadura y harina de semilla de algodón. Al variar el porcentaje p de levadura en la mezcla con proteína, se encontró que el aumento de peso (promedio en gramos) de una rata en un período fue de:

$$f(p) = 160 - p - \frac{900}{p+10} \quad \text{para } 0 \leq p \leq 100$$

Encuentre el aumento de peso máximo y el aumento de peso mínimo.

(14) Un cartel rectangular de cartón debe tener 50 cm^2 para material impreso, márgenes de 3 cm. arriba y abajo y de 2 cm. a cada lado. Encuentre las dimensiones del cartel de manera que la cantidad de cartón que se use sea mínima.

(15) Determine el punto sobre la gráfica de $y = x^3 - 4x^2$ en que la recta tangente tiene pendiente mínima.

(16) Una ventana tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo encima. Si el perímetro total de la ventana es de 2 metros, hallar las dimensiones para que el área sea máxima.

(17) Se desea construir una caja rectangular cerrada con base cuadrada y volumen de 32000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que requiera la menor cantidad de material.