UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
GENERADORES DE CONOCIMIENTOS
PROYECTO GUÍAS USB

EJERCICIOS DE PRECÁLCULO
(Parte I)

Elaborado por:

Miguel Ángel Labrador
12 Ingeniería Electrónica

Isaac J.J Vera
13 Ingeniería Química

Sobre la guía.

La guía de Ejercicios de Precálculo está orientada al estudiante del nuevo Programa Voluntario de Nivelación Académica (PVNA), el cual es una iniciativa de la Universidad Simón Bolívar por proveer a los participantes del programa de las herramientas necesarias para tener una carrera universitaria exitosa y paliar la deserción de los estudiantes por no contar con los conocimientos que se supone debieron aprender durante su trayecto por el bachillerato. El programa se asemeja al exitoso Ciclo de Iniciación Universitaria de la USB y comparte los mismos objetivos.

Generadores de Conocimientos, abreviado como GECO, es una agrupación estudiantil cuyo objetivo es contribuir con espacios para la generación, compilación y divulgación de contenido académico y cultural dentro de la universidad. En este sentido y en el marco del proyecto Guías USB, la agrupación se plantea apoyar al PVNA con la elaboración y difusión de una serie de guías que pretenden dotar al estudiante de un banco de problemas y ejemplos sobre las matemáticas fundamentales para el cálculo, al que pueda acudir para practicar, encontrar ejemplos resueltos y problemas que le ayuden a incorporar los conceptos básicos para el estudio de las matemáticas y otras áreas donde esta aplica y que se encontrará a lo largo de toda su carrera. En ningún momento la guía pretende sustituir al libro de texto asignado por el profesor. No obstante, los autores recomiendan el uso de libro *Precálculo* de James Stewart, del cual se han obtenido numerosos ejemplos y construido nuevas variantes que aparecen como ejemplos resueltos y ejercicios propuestos. Así mismo muchos ejercicios fueron inspirados y tomados de los Manuales de Matemáticas del Programa de Igualdad de Oportunidades (PIO).

Se sugiere al lector de esta guía que no deje ningún problema sin resolver, pues cada uno tiene como objetivo construir un sólida base para enfrentarse a los problemas más complejos, no solo en la asignatura sino tambiénn en el resto de su carrera.

Las matemáticas pueden llegar a ser muy sencillas, sin embargo, no hay manera de llegar a tal punto sin haber trabajado duro. El trabajo duro caracteriza a cada uesebista que tiene éxito en su carrera. Queda de su parte volverse un verdadero estudiante de la universidad de la excelencia.

Ejemplo 1: *Efectue las siguientes operaciones*

a-. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{10}$ b-. $2-\dfrac{1}{6}$

Solución:

No se deje engañar por la sencillez de este ejemplo. El objetivo es mostrarle las diferentes maneras que existen de combinar fracciones y que las conozca todas ya que les serán útiles siempre.

Parte a:

Método 1. En general, se pueden sumar fracciones (de números o expresiones algebraicas) de la siguiente forma:

Sean a, b, c, d, números reales cualesquiera, entonces:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

Apliquemos entonces la fórmula:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{10}=\frac{3(10)+4(1)}{40}=\frac{30+4}{40}=\frac{34}{40}=\frac{17}{20} \quad\Longrightarrow \frac{3}{4}\pm\frac{1}{10}=\frac{17}{20}$$

Problema resuelto. No obstante, el resultado final nos dice que pudo haber una manera más rápida de llegar a él. Se trata del siguiente método.

Método 2. Usaremos el Mínimo Común Denominador (MCD).

Aplicar MCD es lo mismo que buscar el Mínimo Común Múltiplo de los denominadores. Para hacerlo y en general, para hallar el MCM de dos números cualesquiera:

Se descomponen (se factorizan, estrictamente hablando) los números en factores primos:

$$4=2^2 \qquad 10=2(5)$$

Luego, se toman los factores comunes con mayor la potencia y todos los no comunes y se multiplican entre sí:

$$\mathrm{MCM}(4,10)=2^2(5)=20$$

Ahora, para obtener el resultado debe tomar el MCM y dividirlo entre el denomidador de la primera fracción y el resultado multiplicarlo por el numerador de la misma fracción, de inmediato hacer lo mismo con la siguiente fracción y la que sigue en caso de que esté sumando mas de dos fracciones. Observe lo que hemos dicho:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{10}=\frac{5(3)+2(1)}{20}=\frac{17}{20}$$

Puede parecer un procedimiento engorroso, sin embargo, solo hemos dado la explicación larga, en el futuro usted debe ser capaz de aplicar estas operaciones mentalmente ya que se enfrentará a otras más complejas.

Método 3. Para este método nos valdremos de una de las propiedades básicas de las fracciones.

Sean a, b y c números reales cualesquiera, entonces:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c} \qquad \text{Suma/Resta de fracciones con el mismo denomidador.}$$

También, observe que si a, b y c son números reales cualesquiera entonces:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \qquad \text{Propiedad de simplificación.}$$

Usaremos estas dos propiedades para calcular la misma suma:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{10} = \frac{3}{4}\left(\frac{5}{5}\right) + \frac{1}{10}\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{15}{20} + \frac{2}{20} = \frac{17}{20}$$

Hemos multiplicado cada fracción por un *uno* conveniente para que los denominadores de cada fracción nos quedaran iguales y poder sumar las fracciones con mismo denominador.

parte b:

Para esta parte podrá usar cualquiera de los anteriores métodos, sin embargo, usaremos uno que encontrará muy cómodo y rápido para los casos donde solo hay un denominador.*[1]

Generalizamos de la siguiente manera:

Sean a, b y c números reales cualesquiera, entonces

$$a \pm \frac{b}{c} = \frac{a}{1} + \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$$

En otras palabras, solo debemos multiplicar el denominador, c, por a y el resultado sumarlo o restarlo a b.

Aplicamos esta forma al ejercicio.

$$2 - \frac{1}{6} = \frac{12 - 1}{6} = \frac{11}{6}$$

[1]En realidad no solo hay un denominador. Recuerde que todo número puede verse como él mismo dividido entre 1.

Hemos explicado cuatro maneras de calcular la suma de fracciones, que en el fondo son las mismas, sin embargo, es importante que las maneje todas pues para aplicarlas cuando usted lo crea conveniente.

Ejemplo 2: *Efectue y simplifique*

$$1-\frac{2}{3}\left(\frac{-3}{4}\right)-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1+\frac{2}{5}\left(-10+\frac{15}{4}\right)-1\right]\right\}$$

Solución:

Aplicaremos las propiedades de los números reales, así como las operaciones con fracciones del ejemplo anterior.

$$\begin{aligned}
1-\frac{2}{3}\left(\frac{-3}{4}\right)-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1+\frac{2}{5}\left(-10+\frac{15}{4}\right)-1\right]\right\} &= 1-\frac{2}{3}\left(\frac{-3}{4}\right)-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1+\frac{2}{5}\left(-\frac{25}{4}\right)-1\right]\right\}\\
&= 1-\frac{2}{3}\left(\frac{-3}{4}\right)-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1-\frac{5}{2}-1\right]\right\}\\
&= 1-\frac{2}{3}\left(\frac{-3}{4}\right)-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-\frac{5}{2}-2\right]\right\}\\
&= 1-\frac{2}{3}\left(\frac{-3}{4}\right)-\left\{2-\left[-\frac{7}{4}-2\right]\right\}\\
&= 1-\frac{2}{3}\left(\frac{-3}{4}\right)-\left\{2-\left[-\frac{15}{4}\right]\right\}\\
&= 1-\frac{2}{3}\left(\frac{-3}{4}\right)-\left\{2+\frac{15}{4}\right\}\\
&= 1-\frac{2}{3}\left(\frac{-3}{4}\right)-\left\{\frac{23}{4}\right\}\\
&= 1-\frac{2}{3}\left(\frac{-3}{4}\right)-\frac{23}{4}\\
&= 1+\frac{2(3)}{3(4)}-\frac{23}{4}\\
&= 1+\frac{2}{4}-\frac{23}{4}\\
&= 1-\frac{21}{4}\\
&= -\frac{17}{4}
\end{aligned}$$

Probablemente, en algún paso usted ha perdido el hilo de lo que hicimos, a pesar de que resolvimos operación por operación. Le invitamos a que usted mismo resuelva el ejercicio usando la forma que más le convenga y compare procedimiento y resultados.

Ejemplo 3: *Efectue y simplifique*

$$\frac{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{10}+\frac{3}{15}}$$

Solución:

Aplicamos la suma de fracciones (varios métodos simultáneamente) y la propiedad de división de fracciones (coloquialmente conocida como: Doble c). Si aún no tiene claras cuáles son estas propiedades, diríjase al libro de texto sugerido en la introducción.

$$\frac{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{10}+\frac{3}{15}}=\frac{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{5}}=\frac{\frac{4+5}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{5}}=\frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{2}{5(2)}}=\frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{2}{10}}=\frac{\frac{9}{10}}{\frac{1+2}{10}}=\frac{\frac{9}{10}}{\frac{3}{10}}$$

$$=\frac{9(10)}{10(3)}=\frac{9(10)}{3(10)}=\frac{9}{3}\left(\frac{10}{10}\right)=3(1)=3\Longrightarrow\frac{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{10}+\frac{3}{15}}=3$$

Observe que la última línea de cálculos es, por decirlo de alguna manera, el procedimiento largo de cancelar términos arriba y abajo.

Ejemplo 4: *Usando las leyes de los exponentes, calcule*

$$\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)^{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{6}\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{-3}\left(\frac{3}{5}\right)^{6}\left(\frac{2}{7}\right)^{9}}$$

Solución:

Las leyes de los exponentes se encuentran en la tabla mostrada a la derecha. Usando dichas leyes procederemos a calcular la expresión que se nos da, paso a paso. De ahora en adelante asumiremos que ya domina las herramientas que hemos expuesto en los ejemplos anteriores.

Leyes de los Exponentes	
i)	$a^0=1$ y $0^n=0$, *(* 0^0 *no está determinado)*
ii)	$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$
iii)	$a^m a^n=a^{m+n}$
iv)	$\frac{a^n}{a^m}=a^{m-n}$
v)	$(a^m)^n=a^{nm}$
vi)	$(ab)^n=a^n b^n$

Existen múltiples formas de abordar este ejercicio, optaremos por usar la que quizás parece más intuitiva:

Debido a la propiedad conmutativa, podemos asociar las potencias con bases iguales para aplicar la ley *iii*, entonces

vii)	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
viii)	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$
ix)	$\dfrac{a^{-n}}{b^{-m}} = \dfrac{b^m}{a^n}$

$$\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)^{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{6}\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{-3}\left(\frac{3}{5}\right)^{6}\left(\frac{2}{7}\right)^{9}} =$$

$$\overset{\textbf{iii}}{=} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{6-1}\left(\frac{2}{7}\right)^{3}\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{-3+9}\left(\frac{3}{5}\right)^{6}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{5}\left(\frac{2}{7}\right)^{3}\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{6}\left(\frac{3}{5}\right)^{6}} \overset{\textbf{viii}}{=} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{5}\left(\frac{2}{7}\right)^{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{3}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{6}\left(\frac{3}{5}\right)^{6}}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{3}\left(\frac{2}{7}\right)^{3}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{6}\left(\frac{3}{5}\right)^{6}} \overset{\textbf{iii}}{=} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{8}\left(\frac{2}{7}\right)^{3}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{6}\left(\frac{3}{5}\right)^{6}}$$

En este punto vamos a asociar fracciones para poder aplicar la ley *iv*. Note que no conviene, en ningún momento, calcular a fuerza bruta las potencias, ya que obtendríamos cantidades muy engorrosas que tratar.

$$= \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{8}\left(\frac{2}{7}\right)^{3}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{6}\left(\frac{3}{5}\right)^{6}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{8}\left(\frac{2}{7}\right)^{3}}{\left(\frac{3}{5}\right)^{6}\left(\frac{2}{7}\right)^{6}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{8}}{\left(\frac{3}{5}\right)^{6}} \cdot \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^{3}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{6}} \overset{\textbf{iv}}{=} \left(\frac{3}{5}\right)^{8-6}\left(\frac{2}{7}\right)^{3-6} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2}\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} \overset{\textbf{viii}}{=} \left(\frac{3}{5}\right)^{2}\left(\frac{7}{2}\right)^{3}$$

Lo único que falta es aplicar la ley *vii* para terminar de simplificar

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\left(\frac{7}{2}\right)^{3} \overset{\textbf{vii}}{=} \frac{3^2}{5^2} \cdot \frac{7^3}{2^3} = \frac{9}{25} \cdot \frac{343}{8} = \frac{3087}{200}$$

Ejemplo 5: *Demuestra las leyes de lo exponentes iv y ix*

Solución:

Demostremos que $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{m-n}$ usando las leyes y propiedades que ya conocemos.

Si usted no está familiarizado con la realización de este tipo de ejercicios, pues se trata de partir de un lado de la igualdad y llegar al otro mediante leyes, propiedades y operaciones ya conocidas por usted.

En este caso, partimos desde el miembro izquierdo de la ecuación. Por propiedades de las fracciones, sabemos que la multiplicación de fracciones se hace 'linealmente', entonces:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{1} \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m}$$

Ahora observe que la única fracción que tenemos se puede ver como una potencia negativa si nos referimos a la ley *ii*.

$$a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m}$$

Ahora, es fácil observar que llegamos a un expresión que podemos simplificar a través de la ley *iii*.

$$a^n \cdot a^{-m} \overset{\textbf{iii}}{=} a^{n+(-m)} = a^{n-m} \Longrightarrow \frac{a^n}{a^m} = a^{m-n}$$

Finalmente, hemos demostrado, en efecto, la ley *iv*.

Demostremos ahora que $\dfrac{a^{-n}}{b^{-m}} = \dfrac{b^m}{a^n}$.

Nuevamente, partiremos del miembro izquierdo, no porque sea la única forma, sino porque es la más sencilla e intuitiva.

Aplicaremos, tanto al numerador como al denominador la ley *ii*.

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} \overset{\textbf{ii}}{=} \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{b^m}}$$

Solo falta aplicar doble c y obtendremos lo que buscamos.

$$\frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{b^m}} = \frac{b^m}{a^n} \Longrightarrow \frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$

Finalmente, hemos demostrado la ley *ix*.

Ejemplo 6: *Simplifique y no deje ningún exponente negativo.*

$$\left(\frac{q^{-2}rs^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)^{-1}$$

Solución:

Existen varias formas de abordar este ejercicio, pues las leyes nos facilitan mucho el trabajo.

Empecemos por aplicar las leyes *vii* y *iii* ya que, al hacerlo, quitaremos la mayoría de exponentes negativos.

$$\left(\frac{q^{-2}rs^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)^{-1} \overset{\textbf{vii}}{=} \frac{(q^{-2}rs^{-2})^{-1}}{(r^{-5}sq^{-8})^{-1}} \overset{\textbf{iii}}{=} \frac{q^2r^{-1}s^2}{r^5s^{-1}q^8}$$

Ya que tenemos factores de la misma base arriba y abajo, agrupamos en fracciones para aplicar la ley *iv*.

$$\frac{q^2r^{-1}s^2}{q^8r^5s^{-1}} = \frac{q^2}{q^8} \cdot \frac{r^{-1}}{r^5} \cdot \frac{s^2}{s^{-1}} \overset{\textbf{iv}}{=} q^{-6} \cdot r^{-6} \cdot s^3 \overset{\textbf{ii}}{=} \frac{s^3}{q^6r^6}$$

Vea que ya no se puede simplificar dado que todas las potencias restantes tienen diferentes bases.

Ejemplo 7: *Escriba la expresión en la forma más compacta posible suponiendo que x e y son positivos.*

$$\sqrt[3]{x^2y}\sqrt[4]{x^3y^2}$$

Solución:

En este ejemplo introducimos el concepto de raíz sobre la base de las operaciones con exponentes, ya que, entendemos a la raíces como exponentes racionales o fraccionarios.

Exponentes Fraccionarios o Racionales.

Suponga que n y m son números enteros y $n > 0$ entonces para el exponente fraccionario $\dfrac{m}{n}$ ya simplificado, se define

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n llegase a ser un número par entonces a^m debe ser mayor o igual que cero.

De la definición, tenemos que una raíz puede representarse como una base elevada a un exponente que es una fracción, lo que intuitivamente nos lleva a pensar que las raíces cumplen con las leyes de los exponentes, lo que de hecho, es así y lo verificaremos más adelante.

Reescribamos la expresión entonces, usando nuestros conocimientos sobre leyes de los exponente y conociendo la anterior definición.

$$\sqrt[3]{x^2y}\sqrt[4]{x^3y^2} \overset{\textbf{Def}}{=} (x^2y)^{\frac{1}{3}}\left(x^3y^2\right)^{\frac{1}{4}} = (x^2)^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^3)^{\frac{1}{4}}(y^2)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{4}}$$

En este punto, podemos asociar las potencias que tengan las mismas bases y continuar aplicando las leyes de los exponentes:

$$= x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{3}{4}}\right)\left(y^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}\right) = x^{\frac{8+9}{12}}y^{\frac{2+3}{6}} = x^{\frac{17}{12}}y^{\frac{5}{6}}$$

Nos gustaría reescribir todo como raíces nuevamente pero queremos que todo quede dentro de una raíz. Vea lo que pasa si multiplicamos al exponente de la y por 2 arriba y abajo (o sea, un uno conveniente).

$$x^{\frac{17}{12}}y^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{17}{12}}y^{\frac{10}{12}} = \left(x^{17}y^{10}\right)^{\frac{1}{12}}$$

Haremos un pequeño «truco» algebraico, escribimos x^{17} como $x^{12+5} = x^{12}x^5$ y obtenemos que

$$\left(x^{17}y^{10}\right)^{\frac{1}{12}} = \left(x^{12}x^5y^{10}\right)^{\frac{1}{12}} = \left(x^{12}\right)^{\frac{1}{12}}\left(x^5y^{10}\right)^{\frac{1}{12}} = x^{\frac{12}{12}}\left(x^5y^{10}\right)^{\frac{1}{12}} = x\left(x^5y^{10}\right)^{\frac{1}{12}}$$

Ahora sí, convertimos todo en raíces de nuevo, usando la definición.

$$x\left(x^5y^{10}\right)^{\frac{1}{12}} \overset{\textbf{Def}}{=} x\sqrt[12]{x^5y^{10}} \Longrightarrow \sqrt[3]{x^2y}\sqrt[4]{x^3y^2} = x\sqrt[12]{x^5y^{10}}$$

El tratamiento que le hemos dado a este ejercicio es poco prudente, ya que al operar con exponentes fraccionarios hay que cuidarse de las bases negativas (que al hablar de raíces, conocemos como cantidad subradical), ya que no existen raíces con índices pares y cantidad subradical negativa. Por este motivo, en el próximo ejercicio, les presentamos las propiedades de los radicales que surgen a partir de muchas de las operaciones que hemos hecho con los exponentes.

Ejemplo 8: *Suponga todas las letras como reales positivas y simplifique la expresión*

$$\left(\sqrt[3]{4x^2y}\right)\left(\sqrt[3]{2x^5y^2}\right)$$

Solución:

En la tabla de la derecha se presentan las propiedades de los radicales, la cuales, como ya mencionamos, cumplen con las leyes de los exponentes anteriormente trabajadas.

Propiedades de las raíces	
i)	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ *(Si n es par se tiene $a^m \geqslant 0$)*

Así como hicimos para los exponentes, acá también enumeramos e indicaremos las propiedades que iremos utilizando, sobre la marcha.

ii)	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$
iii)	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
iv)	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
v)	$\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar
vi)	$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a\rvert$ si n es par

Vamos a colocarlo todo en una sola raíz usando la propiedad *ii*.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{4x^2y}\right)\left(\sqrt[3]{2x^5y^2}\right) &\stackrel{\textbf{ii}}{=} \sqrt[3]{(4x^2y)(2x^5y^2)}\\ &= \sqrt[3]{8x^7y^3}\\ &\stackrel{\textbf{ii}}{=} \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x^7}\sqrt[3]{y^3}\end{aligned}$$

Observe que hemos utilizado la propiedad *ii* dos veces pero viendo la igualdad en dos sentidos diferentes.

Ahora, para usar la propiedad *v* reescribimos las cantidades subradicales convenientemente.

$$\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x^7}\sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{x.x^6}\sqrt[3]{y^3} \stackrel{\textbf{ii}}{=} \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^6}\sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x^2)^3}\sqrt[3]{y^3} \stackrel{\textbf{v}}{=} 2\sqrt[3]{x}.x^2y$$

Finalmente y reordenando (usando conmutativa):

$$\left(\sqrt[3]{4x^2y}\right)\left(\sqrt[3]{2x^5y^2}\right) = 2yx^2\sqrt[3]{x}$$

Ejemplo 9: *Demuestre que si a y b son números reales y n un número natural, tal que si n es par entonces a y b son mayores o iguales que cero, se cumple:*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

Solución:

Partimos del miembro izquierdo de la ecuación aplicando la definición de exponente fraccionario y luego las propiedades de lo exponentes.

$$\sqrt[n]{ab} = (ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

Finalmente, queda demostrada la propiedad.

Observe que de no dejar establecidas las hipótesis del enunciado la propiedad no tendría sentido. Prueba suponiendo que $n = 2$ y $a = b = -4$ ¿ Cuánto daría después de usar la propiedad?

Ejemplo 10: *Simplifique la expresión*

$$\sqrt{\sqrt[5]{\left(a^5b^{10}\right)^4}}$$

Solución:

Apliquemos las propiedades de las raíces.

$$\sqrt{\sqrt[5]{\left(a^5b^{10}\right)^4}} \overset{\textbf{iv}}{=} \sqrt[10]{\left(a^5b^{10}\right)^4} = \sqrt[10]{a^{20}b^{40}} \overset{\textbf{ii}}{=} \sqrt[10]{a^{20}}\,\sqrt[10]{b^{40}} = \sqrt[10]{(a^2)^{10}}\,\sqrt[10]{(b^4)^{10}}$$

Aplicamos la propiedad *vi* ya que el índice de la raíz es par.

$$\sqrt[10]{(a^2)^{10}}\,\sqrt[10]{(b^4)^{10}} = |a^2||b^4|$$

Recuerde que el valor absoluto de algún número dependerá del signo del número en el argumento. En este caso ambos números son positivos. La razón es que tanto a^2 como b^4 son positivos, ya que están elevados a una potencia par y todo número real elevado a una potencia par da como resultado otro número positivo. Por lo tanto las barras de valor absoluto son redundantes, ya que la cantidad que encierran son positivas.

Finalmente

$$\sqrt{\sqrt[5]{\left(a^5b^{10}\right)^4}} = a^2b^4$$

Ejemplo 11: *Simplifique la expresión suponiendo que las letras representan números positivos*

$$\left(2x^4y^{-\frac{4}{5}}\right)^3\left(8y^2\right)^{\frac{2}{3}}$$

Solución:

Aplicamos las leyes de los exponentes, las cuales sabemos, aplican para los exponentes fraccionarios.

$$\begin{aligned}
\left(2x^4y^{-\frac{4}{5}}\right)^3\left(8y^2\right)^{\frac{2}{3}} &= 2^3x^{12}y^{-\frac{12}{5}}8^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}} \\
&= \left(2^38^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{12}\right)\left(y^{-\frac{12}{5}}y^{\frac{4}{3}}\right) \\
&= \left(2^3(2^3)^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{12}\right)\left(y^{-\frac{12}{5}}y^{\frac{4}{3}}\right) \\
&= \left(2^32^2\right)\left(x^{12}\right)\left(y^{-\frac{12}{5}+\frac{4}{3}}\right) \\
&= 2^5\left(x^{12}\right)\left(y^{-\frac{12}{5}+\frac{4}{3}}\right) \\
&= 2^5\left(x^{12}\right)\left(y^{\frac{-36+20}{15}}\right) \\
&= 2^5x^{12}y^{-\frac{16}{15}}
\end{aligned}$$

Recuerde que un exponente negativo indica que podemos escribir la misma expresión dividendo al uno y una vez hecho esto podemos escribir el exponente racional, como una raíz.

$$\begin{aligned}&= 2^5x^{12}y^{-\frac{16}{15}} = 32x^{12}\left(\frac{1}{y^{\frac{16}{15}}}\right) = 32x^{12}\left(\frac{1}{\sqrt[15]{y^{16}}}\right) = 32x^{12}\left(\frac{1}{\sqrt[15]{y^{15}y}}\right)\\ &= 32x^{12}\left(\frac{1}{y\sqrt[15]{y}}\right) = \frac{32x^{12}}{y\sqrt[15]{y}}\end{aligned}$$

Finalmente

$$\left(2x^4y^{-\frac{4}{5}}\right)^3\left(8y^2\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{32x^{12}}{y\sqrt[15]{y}}$$

Ejemplo 12: *Simplifique la expresión suponiendo que las letras representan números positivos*

$$\frac{\left(y^{10}x^{-5}\right)^{\frac{1}{5}}}{\left(y^{-2}z^3\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Solución:

Para este ejercicio convertimos primero todo a raíces y operamos con las propiedades de los radicales, aunque también puede trabajarse como en el ejemplo anterior.

$$\begin{aligned}\frac{\left(y^{10}x^{-5}\right)^{\frac{1}{5}}}{\left(y^{-2}z^3\right)^{\frac{1}{3}}} &= \frac{\sqrt[5]{y^{10}x^{-5}}}{\sqrt[3]{y^{-2}z^3}} = \frac{\sqrt[5]{y^{10}}\sqrt[5]{x^{-5}}}{\sqrt[3]{y^{-2}}\sqrt[3]{z^3}} = \frac{\sqrt[5]{(y^2)^5}\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{y^2}}\sqrt[3]{z^3}} = \frac{y^2\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{y^2}}z}\\ &= \frac{y^2\frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{x^5}}}{z\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{y^2}}} = \frac{y^2\frac{1}{x}}{z\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}} = \frac{\frac{y^2}{x}}{\frac{z}{\sqrt[3]{y^2}}} = \frac{y^2\sqrt[3]{y^2}}{xz}\end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{\left(y^{10}x^{-5}\right)^{\frac{1}{5}}}{\left(y^{-2}z^3\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{y^2\sqrt[3]{y^2}}{xz}$$

Ejemplo 13: *Escriba la expresión como una sola raíz. Suponga que todas la letras son números positivos.*

$$\sqrt[5]{64x^6y}-\sqrt[10]{4x^{12}y^2}+\sqrt[15]{8x^{18}y^3}-\sqrt[20]{16x^{24}y^4}$$

Solución:

Nuevamente, aplicamos las propiedades de la raíces. No las indicaremos, intente detectar que propiedad se utilizó.

$$\begin{aligned}
&\sqrt[5]{64x^6y}-\sqrt[10]{4x^{12}y^2}+\sqrt[15]{8x^{18}y^3}-\sqrt[20]{16x^{24}y^4}\\
=&\sqrt[5]{2^6x^6y}-\sqrt[10]{4x^{12}y^2}+\sqrt[15]{8x^{18}y^3}-\sqrt[20]{16x^{24}y^4}\\
=&2x\sqrt[5]{2xy}-\sqrt[10]{4x^{12}y^2}+\sqrt[15]{8x^{18}y^3}-\sqrt[20]{16x^{24}y^4}\\
=&2x\sqrt[5]{2xy}-\sqrt[10]{2^2x^{10}x^2y^2}+\sqrt[15]{2^3x^{15}x^3y^3}-\sqrt[20]{2^4x^{20}x^4y^4}\\
=&2x\sqrt[5]{2xy}-|x|\sqrt[10]{2^2x^2y^2}+x\sqrt[15]{2^3x^3y^3}-|x|\sqrt[20]{2^4x^4y^4}
\end{aligned}$$

Recuerde que los valores absolutos son producto de la propiedad *vi*. No obstante, el enunciado nos indica que todas la letras representan números positivos, luego, el valor absoluto de un número positivo es el mismo número.

$$\begin{aligned}
&2x\sqrt[5]{2xy}-|x|\sqrt[10]{2^2x^2y^2}+x\sqrt[15]{2^3x^3y^3}-|x|\sqrt[20]{2^4x^4y^4}\\
=&2x\sqrt[5]{2xy}-x\sqrt[10]{2^2x^2y^2}+x\sqrt[15]{2^3x^3y^3}-x\sqrt[20]{2^4x^4y^4}\\
=&2x\sqrt[5]{2xy}-x\sqrt[10]{(2xy)^2}+x\sqrt[15]{(2xy)^3}-x\sqrt[20]{(2xy)^4}
\end{aligned}$$

Vea que ahora tenemos cantidades subradicales que tienen la misma base. Escribamos las raíces como exponentes fraccionarios.

$$\begin{aligned}
&=2x\sqrt[5]{2xy}-x\sqrt[10]{(2xy)^2}+x\sqrt[15]{(2xy)^3}-x\sqrt[20]{(2xy)^4}\\
&=2x(2xy)^{\frac{1}{5}}-x(2xy)^{\frac{2}{10}}+x(2xy)^{\frac{3}{15}}-x(2xy)^{\frac{4}{20}}
\end{aligned}$$

Note que podemos hacer simplificaciones en los exponentes, de manera que

$$=2x(2xy)^{\frac{1}{5}}-x(2xy)^{\frac{1}{5}}+x(2xy)^{\frac{1}{5}}-x(2xy)^{\frac{1}{5}}$$

Si volvemos a escribir todo como raíces, se dará cuenta que podemos sumar y restarlas, ya que raíces con el mismo índice y cantidad subradical se pueden sumar y restar.

Error Común. No comenta el error de sumar cantidades de naturaleza distinta. Lo que seguramente habrá escuchado de sus instructores ya: No sume peras con manzanas.

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$$ La igualdad es falsa.

Entonces:

$$\begin{aligned}
&= 2x(2xy)^{\frac{1}{5}} - x(2xy)^{\frac{1}{5}} + x(2xy)^{\frac{1}{5}} - x(2xy)^{\frac{1}{5}} \\
&= 2x\sqrt[5]{2xy} - x\sqrt[5]{2xy} + x\sqrt[5]{2xy} - x\sqrt[5]{2xy} \\
&= 2x\sqrt[5]{2xy} - x\sqrt[5]{2xy} \\
&= x\sqrt[5]{2xy}
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\sqrt[5]{64x^6y} - \sqrt[10]{4x^{12}y^2} + \sqrt[15]{8x^{18}y^3} - \sqrt[20]{16x^{24}y^4} = x\sqrt[5]{2xy}$$

Ejemplo 14: *Desarrolle la expresión utilizando las fórmulas de producto notable.*

$$(x+1)(2x^2+x+1)$$

Solución:

Usted puede comenzar el ejercicio aplicando la propiedad distributiva tal como lo ha hecho hasta ahora, sin embargo, aunque si aplicaremos distributiva, lo haremos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
(x+1)(2x^2+x+1) &= (x+1)(2x^2+(x+1)) \\
&= (x+1)2x^2+(x+1)^2
\end{aligned}$$

Note que solo asociamos los términos x y 1 como un solo factor para aplicar luego distributiva.

Productos Notables	
i)	$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
ii)	$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
iii)	$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
iv)	$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
v)	$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

Ahora solo queda aplicar la propiedad distributiva para el primer término y luego desarrollar el segundo utilizando el segundo producto notable.

$$= (x+1)2x^2 + (x+1)^2 = 2x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + 1 = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Finalmente

$$(x+1)(2x^2+x+1) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Ejemplo 15: *Desarrolle la expresión*

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)$$

Solución:

Para tener éxito operando las expresiones algebraicas, en otras palabras, desarrollar, factorizar y simplificar, debe tener claro el principio de sustitución el cual se trata de saber que fórmula utilizar y que términos sustituiremos en ella.

En este caso, es evidente que aplica el primer producto notable, donde $A = x^{\frac{1}{2}}$ y $B = y^{\frac{1}{2}}$.

Aplicamos la fórmula:

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2\right) = x - y$$

Ejemplo 16: *Demuestre la fórmula*

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

Solución:

Recuerde que si se quiere demostrar una fórmula sencilla como esta, es bueno partir de uno de los miembros de la ecuación y operar algebraicamente hasta llegar al otro.

Tomamos el miembro izquierdo para hacer la demostración:

$$(A - B)^3 = (A - B)(A - B)^2$$

Aplicamos el tercer producto notable y obtenemos

$$\begin{aligned}
(A - B)(A - B)^2 &= (A - B)(A^2 - 2AB + B^2) \\
&= A(A^2 - 2AB + B^2) - B(A^2 - 2AB + B^2) \\
&= A^3 - 2A^2B + AB^2 - BA^2 + 2AB^2 - B^3 \\
&= A^3 - 2A^2B - BA^2 + AB^2 + 2AB^2 - B^3 \\
&= A^3 - 2A^2B - A^2B + AB^2 + 2AB^2 - B^3 \\
&= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3
\end{aligned}$$

Finalmente, queda demostrada la fórmula.

Ejemplo 17: *Demuestre la fórmula*

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

Solución:

Si es suficientemente observador, se habrá dado cuenta que esta fórmula no aparece en la lista de fórmulas de productos notables. La razón es que no existe, ya que no aplica para todos los números reales.

Para demostrar que no aplica, daremos un contraejemplo.

Un contraejemplo se trata de ofrecer un ejemplo donde no se satisface la regla que se dice aplica para todo los casos, en otras palabras, daremos un ejemplo donde la fórmula no se cumple. Puede escoger el que usted quiera.

Suponga que $a = 1$ y $b = 2$ entonces el miembro izquierdo de la igualdad:

$$(a+b)^2 = (1+2)^2 = 3^2 = 9$$

Mientras que el miembro derecho

$$a^2 + b^2 = (1)^2 + (2)^2 = 5$$

Como $9 \neq 5$ la igualdad no se cumple para el caso donde $a = 1$ y $b = 2$, violando así la presunción de que es válida para todos los números reales.

Ejemplo 18: *Factorice las siguientes expresiones obteniendo los factores comunes.*

a) $4m(a^2 + x - 1) + 3m(x - 1 + a^2)$ b) $x(2a + b + c) - 2a - b - c$

Solución:

Parte a:

Observe que tenemos dos términos sumándose, donde cada término posee un factor m que podemos sacar factor común.

$$4m(a^2 + x - 1) + 3mx(x - 1 + a^2) = m\left[4(a^2 + x - 1) + 3x(x - 1 + a^2)\right]$$

Recuerde que factorizar una expresión consiste en realizar el proceso inverso de la propiedad distributiva, por lo tanto si usted factorizar algo, al aplicar la propiedad distributiva debería poder llegar al punto donde comenzó siempre que su factorización esté bien.

Aún no terminamos con el ejercicio, ya que podemos sacar otro factor común. Ambos términos dentro de los corchetes poseen el factor $a^2 + x - 1$.

$$\begin{aligned} m\left[4(a^2 + x - 1) + 3x(x - 1 + a^2)\right] &= m\left[4(a^2 + x - 1) + 3x(a^2 + x - 1)\right] \\ &= m(a^2 + x - 1)(4 + 3x) \end{aligned}$$

Finalmente

$$4m(a^2 + x - 1) + 3mx(x - 1 + a^2) = m(a^2 + x - 1)(4 + 3x)$$

Nótese que pudimos haber sacado ambos términos factor común y habernos ahorrado un par de pasos.

Parte b:

Fíjese que, nuevamente, tenemos una suma de términos sin embargo, esta vez vamos a sacar factor común de forma parcial. Sacamos factor común -1:

$$x(2a + b + c) - 2a - b - c = x(2a + b + c) - (2a + b + c)$$

Insistimos que factorizar se trata de revertir el proceso de la propiedad distributiva y si sacamos factor común -1 de una suma(o resta) de términos, cada término cambia de signo para que, al devolver el procedimiento usando distributiva, lleguemos al mismo lugar desde el cual partimos.

Ahora podemos sacar factor $2a + b + c$ de toda la expresión

$$x(2a + b + c) - (2a + b + c) = (2a + b + c)(x - 1)$$

Finalmente

$$x(2a + b + c) - 2a - b - c = (2a + b + c)(x - 1)$$

Ejemplo 19: *Factorice sacando factor común la expresión*

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(3x + 4)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3x + 4)^{-\frac{1}{2}}$$

Solución:

Cuando se trata de expresiones con exponentes racionales, sacamos factor común el término que tenga el menor exponente fraccionario. Para este caso, como x es factor común, sacamos factor común $x^{-\frac{1}{2}}$ que es la x con menor exponente.

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(3x + 4)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3x + 4)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}(3x + 4)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}(3x + 4)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

Observe que si sacamos factor común $x^{\frac{1}{2}}$, tendremos que restarle $-\frac{1}{2}$ a los exponentes de cada x. Por otro lado, también podemos sacar $\frac{1}{2}$ factor común.

$$= x^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(3x+4)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x(3x+4)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\left[(3x+4)^{\frac{1}{2}} - 3x(3x+4)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

El factor $(3x+4)$ también lo podemos sacar factor común con su menor potencia.

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\left[(3x+4)^{\frac{1}{2}} - 3x(3x+4)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(3x+4)^{-\frac{1}{2}}\left[(3x+4)^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)} - 3x(3x+4)^{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right]$$
$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(3x+4)^{-\frac{1}{2}}\left[(3x+4) - 3x\right] = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(3x+4)^{-\frac{1}{2}}(4) = \frac{4}{2}x^{-\frac{1}{2}}(3x+4)^{-\frac{1}{2}} = 2x^{-\frac{1}{2}}(3x+4)^{-\frac{1}{2}}$$

Ya hemos terminado de factorizar la expresión, de manera que:

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(3x+4)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3x+4)^{-\frac{1}{2}} = 2x^{-\frac{1}{2}}(3x+4)^{-\frac{1}{2}}$$

Expresiones como las de este ejemplo son las que aparecen comúnmente luego de aplicar la regla del cociente para derivadas de funciones.

Ejemplo 20: *Factorice las siguientes expresiones*

a) $(5a+x)^2 + 24 - 11(x+5a)$ b) $7(a+1)^4 + 31(a^2+2a+1) - 20$

Solución:

Parte a:

Note que la expresión tiene la forma $x^2 + bx + c$, donde x vendría a ser $5a + x$, solo debemos reordenarla un poco.

$$(5a+x)^2 + 24 - 11(x+5a) = (5a+x)^2 - 11(5a+x) + 24$$

Proponemos un cambio de variable auxiliar. Llamemos $t = 5a + x$ y reescribimos la expresión.

Note que

$$(5a+x)^2 - 11(5a+x) + 24 \overset{\mathbf{CV}}{=} t^2 - 11t + 24$$

Devolveremos el cambio una vez hallamos factorizado.

Lo que tenemos ahora es un polinomio de segundo grado y podemos factorizarlo usando el «ensayo y error» o «tanteo».

Método del Ensayo y Error

Un polinomio cuadrático del tipo $x^2 + bx + c$ se puede factorizar, en algunos casos, buscando dos números s y r tales que

$$s.r = c \qquad \text{y} \qquad s + r = b$$

En otras palabras, dos números que al multiplicarlos entre sí den c y al sumarlos den b.

En este caso tenemos que dichos números son -3 y -8, donde

$$(-3)(-8) = 24 \qquad \text{y} \qquad -3 - 8 = -11$$

Con lo cual

$$t^2 - 11t + 24 = (t-3)(t-8)$$

Ya que hemos factorizado el polinomio, devolvemos el cambio de variable. Recuerde que hemos considerado que $t = 5a + x$.

$$t^2 - 11t + 24 = (t-3)(t-8) \overset{\mathbf{CV}}{=} (5a + x - 3)(5a + x - 8)$$

Finalmente

$$(5a + x)^2 + 24 - 11(x + 5a) = (5a + x - 3)(5a + x - 8)$$

Parte b:

Podemos resolver esta parte de forma similar a la otra, con un cambio de variable, sin embargo, no parece que esta expresión cumpla con la forma $x^2 + bx + c$. Vamos a manipular un poco.

Para empezar, note que el factor que acompaña al 31 corresponde con la fórmula de factorización ii, por lo tanto podemos escribir:

$$\begin{aligned} &7(a+1)^4 + 31(a^2 + 2a + 1) - 20 \\ =&7(a+1)^4 + 31(a+1)^2 - 20 \end{aligned}$$

Reescribimos la expresión de la siguiente manera para poder «reducirla» a un polinomio cuadrático.

$$= 7\left[(a+1)^2\right]^2 + 31(a+1)^2 - 20$$

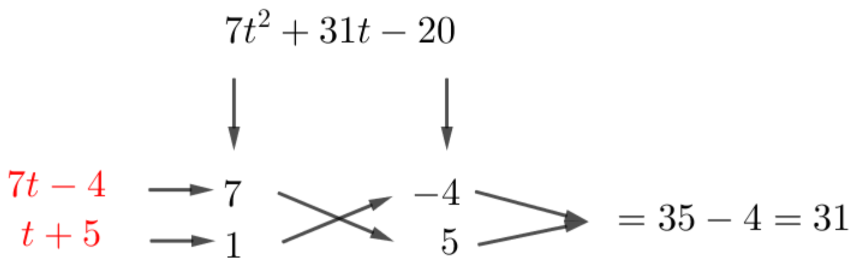
Fórmulas de Factorización	
i)	$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$
ii)	$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$
iii)	$A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$
iv)	$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$
v)	$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$

Hagamos nuevamente un cambio de variable, $t = (a+1)^2$ y obtenemos que

$$7\left[(a+1)^2\right]^2 + 31(a+1)^2 - 20 \overset{\textbf{CV}}{=} 7t^2 + 31t - 20$$

Ahora que tenemos un polinomio cuadrático ya podemos pensar en factorizar, sin embargo no podemos usar el mismo método anterior ya que este polinomio no es de la forma $x^2 + bx + c$. Para polinomios cuadráticos de la forma $ax^2 + bx + c$ utilizaremos un caso de tanteo más especial.

Descomponemos el 7 en dos factores, por ejemplo $7 = (7)(1)$. Descomponemos también -20 como $-20 = (-4)(5)$, aunque también pudiese ser $-20 = (-1)(20)$, $-20 = (-5)(4)$, etc. No obstante debemos «tantear» una combinación que sea la factorización.



Ahora, observe la figura y vea como hemos multiplicado los factores que hemos sacado y el resultado que hemos obtenido: El coeficiente que acompaña a t. Esta es la forma de saber que la descomposición es acertada y que la factorización que se muestra en rojo es la correcta, por lo tanto:

$$7t^2 + 31t - 20 = (7t-4)(t+5) \overset{\textbf{CV}}{=} \left(7(a+1)^2 - 4\right)\left((a+1)^2 + 5\right)$$

Note que aún podemos seguir factorizando, ya que el factor $(7(a+1)^2 - 4)$ es casi una diferencia de cuadrados, por lo tanto es factorizable, al contrario del factor $((a+1)^2 + 5)$, la suma de cuadrados no es factorizable en $\mathbb{R}$.

Utilizaremos la fórmula de factorización número i.

Escribamos el primer factor como una diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned}\left(7(a+1)^2 - 4\right)\left((a+1)^2 + 5\right) &= \left((\sqrt{7})^2(a+1)^2 - 4\right)\left((a+1)^2 + 5\right)\\ &= \left(\left(\sqrt{7}(a+1)\right)^2 - 4\right)\left((a+1)^2 + 5\right)\end{aligned}$$

Vea bien lo que hemos hecho, hemos reescrito el número 7 como $(\sqrt{7})^2$ para poder meterlo dentro del cuadrado junto con el factor $(a+1)$ y así tener una verdadera diferencia de cuadrados.

usando la fórmula i

$$\begin{aligned}\left(\left(\sqrt{7}(a+1)\right)^2-4\right)\left((a+1)^2+5\right) &= \left(\sqrt{7}(a+1)-4\right)\left(\sqrt{7}(a+1)+4\right)\left((a+1)^2+5\right)\\ &= \left(\sqrt{7}a+7-4\right)\left(\sqrt{7}a+7+4\right)\left((a+1)^2+5\right)\\ &= \left(\sqrt{7}a+3\right)\left(\sqrt{7}a+11\right)\left((a+1)^2+5\right)\end{aligned}$$

Finalmente

$$7(a+1)^4+31(a^2+2a+1)-20=\left(\sqrt{7}a+3\right)\left(\sqrt{7}a+11\right)\left((a+1)^2+5\right)$$

Ejemplo 21: *Factorice las siguientes expresiones*

a) $m^3+3m^2-16m-48$ b) $a^5-4a^3-8a^2+32$

Solución:

En este ejemplo presentamos la factorización por agrupación, que sirve para factorizar polinomios de grado mayor a dos con solo aplicar factor común.

Parte a:

La idea es factorizar parcialmente la expresión para que aparezca un factor común global y continuar factorizando, de ser necesario.

Sacamos factor común de los primeros dos monomios, luego hacemos lo mismo con los restantes

$$\begin{aligned}m^3+3m^2-16m-48 &= m^2(m+3)-16m-48\\ &= m^2(m+3)-16(m+3)\end{aligned}$$

Note que antes teníamos la suma de cuatro términos y ahora tenemos la suma dos términos, lo cuales tienen un factor en común, el $m+3$.

Sacamos factor común $m+3$:

$$\begin{aligned}m^2(m+3)-16(m+3) &= (m+3)(m^2-16)\\ &= (m+3)(m^2-4^2)\\ &= (m+3)(m-4)(m+4)\end{aligned}$$

Finalmente

$$m^3+3m^2-16m-48=(m+3)(m-4)(m+4)$$

Parte b:

Nuevamente, sacamos factor común de forma parcial

$$\begin{aligned} a^5 - 4a^3 - 8a^2 + 32 &= a^3(a^2-4) - 8(a^2-4) \\ &= (a^2-4)(a^3-8) \end{aligned}$$

Fíjese que podemos seguir factorizando ya que los dos factores que nos quedaron son factorizables al ser uno una diferencia de cuadrados y otro una diferencia de cubos.

$$\begin{aligned} (a^2-4)(a^3-8) &= (a^2-2^2)(a^3-2^3) \\ &= (a-2)(a+2)(a^3-2^3) \end{aligned}$$

Para la diferencia de cubos usaremos la fórmula de factorización número *iv*.

$$(a-2)(a+2)(a^3-2^3) = (a-2)(a+2)(a-2)(a^2+2a+4)$$

El polinomio a^2+2a+4 no se puede factorizar más en los números reales, por razones que usted verá más adelante en su curso de matemáticas.

Finalmente

$$a^5 - 4a^3 - 8a^2 + 32 = (a-2)(a+2)(a-2)(a^2+2a+4)$$

Ejemplo 22: *Factorice el polinomio*

$$x^4 + 2x^2 + 9$$

Solución:

Ya hemos visto que polinomios de este estilo se pueden factorizar aplicando un cambio de variable y reducirlos a polinomios de grado dos. No obstante, note que este polinomio no se puede factorizar por dicho procedimiento ya que luego no podremos utilizar tanteo, de hecho no podríamos factorizar como un polinomio de grado dos.

Para este ejercicio acudiremos a una técnica muy recurrente en manipulación algebraica: La de sumar y restar términos de forma conveniente.

$$x^4 + 2x^2 + 9 = x^4 + 2x^2 + 9 + (4x^2 - 4x^2) = x^4 + 2x^2 + 4x^2 + 9 - 4x^2 = x^4 + 6x^2 + 9 - 4x^2$$

Hemos sumado y restado el monomio $4x^2$, lo cual no genera ningún problema, pues es como sumar cero. La razón de ser de este truco es la siguiente:

$$x^4 + 6x^2 + 9 - 4x^2 = (x^2+3)^2 - 4x^2 = (x^2+3)^2 - (2x)^2$$

Hemos convertido el polinomio inicial en una diferencia de cuadrados. Factorizamos como corresponde

$$(x^2+3)^2-(2x)^2=(x^2+3-2x)(x^2+3+2x)=(x^2-2x+3)(x^2+2x+3)$$

Los dos factores resultantes, que son ambos polinomios de segundo grado, no son factorizables, por lo que finalmente

$$x^4+2x^2+9=(x^2-2x+3)(x^2+2x+3)$$

Si no está convencido del procedimiento, haga propiedad distributiva hacia atrás y verá que llegará al polinomio inicial.

Ejemplo 23: *Simplifique las expresiones*

$$\text{a) } \frac{a^2-a-10}{a^2-7a+10} \qquad\qquad \text{b) } \frac{x^2-x-6}{x^2+2x}\cdot\frac{x^3+x^2}{x^2-2x-3}$$

Solución:

Parte a:

Para simplificar expresiones algebraicas, siempre y cuando estas sean simplificables, tendremos primero que factorizar todas las expresiones como los dos polinomios que conforman este ejercicio y luego ver que se puede simplificar.

Por lo tanto no es válido pensar que el monomio a^2 del numerador se puede «cancelar» con el del denominador. La razón es que ninguno de los están multiplicando.

Se ve que es posible utilizar tanteo, de forma que vamos a factorizar:

$$\frac{a^2-a-10}{a^2-7a+10}=\frac{(a-5)(a+4)}{(a-2)(a-5)}$$

Note que ahora, tanto en el denominador como en el denominador, tenemos factores que se multiplican por lo que ya podemos pensar en simplificar o «cancelar» términos.

$$\frac{(a-5)(a+4)}{(a-2)(a-5)}=\frac{(a+4)(a-5)}{(a-2)(a-5)}=\frac{a+4}{a-2}\frac{a-5}{a-5}=\frac{a+4}{a-2}(1)=\frac{a+4}{a-2}$$

Hemos hecho la simplificación lenta o menos directa, para que usted vea que tachar términos no es cuestión de magia. De ahora en adelante lo haremos de la forma tradicional.

Parte b:

Ahora tenemos el producto (nos lo indica el signo de producto) entre dos expresiones como la que simplificamos en la parte anterior. De forma que, tal y como en la parte anterior, factorizamos:

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+2x}\cdot\frac{x^3+x^2}{x^2-2x-3}=\frac{(x-3)(x+2)}{x(x+2)}\cdot\frac{x^2(x+1)}{(x-3)(x+1)}$$

Observe que no siempre factorizaremos con tanteo, justo acabamos de factorizar por factor común.

Vea también que podemos simplificar algunos términos de ambas expresiones antes de hacer el producto.

$$\frac{(x-3)(x+2)}{x(x+2)}\cdot\frac{x^2(x+1)}{(x-3)(x+1)}=\frac{x-3}{x}\cdot\frac{x^2}{x-3}=\frac{(x-3)x^2}{x(x-3)}=\frac{x^2}{x}=x$$

Finalmente:

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+2x}\cdot\frac{x^3+x^2}{x^2-2x-3}=x$$

Ejemplo 24: *Simplifique la expresión*

$$\frac{\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}}$$

Solución:

Aunque en este ejemplo podríamos factorizar primero como antes, primero ejecutamos la «doble c» y luego factorizaremos:

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}}&=\frac{(2x^2-3x-2)(x^2+x-2)}{(x^2-1)(2x^2+5x+2)}\\&=\frac{(2x+1)(x-2)(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)(2x+1)(x+2)}\\&=\frac{x-2}{x+1}\end{aligned}$$

Ejemplo 25:

$$\frac{1-x^2}{9-x^2} - \frac{x^2}{9+6x+x^2} - \frac{6x}{9-6x+x^2}$$

Solución:

Para sumar o restar expresiones racionales debemos hacer el Mínimo Común Múltiplo, para lo cual debemos factorizar los denominadores en busca de los comunes y no comunes.

Sin embargo, nos gusta ordenar los polinomios de forma descendente así que antes de empezar haremos unos pequeños ajustes.

$$\frac{1-x^2}{9-x^2} - \frac{x^2}{9+6x+x^2} - \frac{6x}{9-6x+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2-9} - \frac{x^2}{x^2+6x+9} - \frac{6x}{x^2-6x+9}$$

Ahora sí, factoricemos los denominadores para encontrar el MCM entre ellos.

$$\frac{x^2-1}{(x-3)(x+3)} - \frac{x^2}{(x+3)^2} - \frac{6x}{(x-3)^2}$$

Para encontrar el MCM debemos localizar quiénes son los factores comunes y los no comunes.

Comunes: $x-3$**;** $(x-3)^2$**;** $x+3$**;** $(x+3)^2$ **No comunes:** No hay.

La teoría nos dice que para encontrar el MCM debemos tomar de entre los comunes a los que tengan la mayor potencia y de los no comunes a todos, para así multiplicarlos. Como solo tenemos comunes entonces el MCM está dado por:

$$(x-3)^2(x+3)^2$$

De manera que, ya con nuestro MCM, hacemos el mismo procedimiento que cuando sumábamos o restábamos fracciones de números reales. Si desea refrescar su memoria remítase al ejemplo 1.

$$\frac{x^2-1}{(x-3)(x+3)} - \frac{x^2}{(x+3)^2} - \frac{6x}{(x-3)^2} = \frac{(x-3)(x+3)(1-x^2)-(x-3)^2(x^2)-(x+3)^2(6x)}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

Ahora haremos algo que le puede parecer contradictorio, vamos a desarrollar todo el numerador para poder escribir todo como un solo polinomio.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(x-3)(x+3)(1-x^2)-(x-3)^2(x^2)-(x+3)^2(6x)}{(x-3)^2(x+3)^2}\\
&= \frac{(x^2-9)(1-x^2)-x^2(x^2-6x+9)-6x(x^2+6x+9)}{(x-3)^2(x+3)^2}\\
&= \frac{x^4-10x^2+9-x^4+6x^3-9x^2-6x^3-36x^2-54x}{(x-3)^2(x+3)^2}\\
&= \frac{-10x^2+9-9x^2-36x^2-54x}{(x-3)^2(x+3)^2}\\
&= \frac{-55x^2+9-54x}{(x-3)^2(x+3)^2}\\
&= \frac{9-54x-55x^2}{(x-3)^2(x+3)^2}
\end{aligned}
$$

Finalmente:

$$\frac{1-x^2}{9-x^2}-\frac{x^2}{9+6x+x^2}-\frac{6x}{9-6x+x^2}=\frac{9-54x-55x^2}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

Ejemplo 26: *Efectúe la resta*

$$\frac{5}{2x-3}-\frac{3}{(2x-3)^2}$$

Solución:

Como seguramente ya se dio cuenta los métodos para sumar o restar fracciones de números reales son aplicables a las expresiones racionales, de manera que ahora resolveremos este ejercicio de una forma diferente al anterior, aunque por supuesto, por cualquier método válido debe obtener el mismo resultado.

Multiplicamos la primera fracción por le término $2x-3$ arriba y abajo, en otras palabras, por un 1 conveniente:

$$\frac{5}{2x-3}-\frac{3}{(2x-3)^2}=\frac{5(2x-3)}{(2x-3)^2}-\frac{3}{(2x-3)^2}$$

Vea que ahora tenemos la resta de dos fracciones con igual denominador, de forma que podemos decir:

$$\frac{5(2x-3)}{(2x-3)^2}-\frac{3}{(2x-3)^2}=\frac{5(2x-3)-3}{(2x-3)^2}=\frac{10x-15-3}{(2x-3)^2}=\frac{10x-18}{(2x-3)^2}$$

Ejemplo 27: *Simplifique*

$$\frac{1}{x-\dfrac{x}{x-\dfrac{x^2}{x+1}}}$$

Solución:

Aunque parezca un ejercicio complicado, realmente se trata de hacer operaciones sucesivamente hasta conseguir una sola fracción.

Sumamos las dos fracciones más internas:

$$\frac{1}{x-\dfrac{x}{x-\dfrac{x^2}{x+1}}}=\frac{1}{x-\dfrac{x}{\dfrac{x(x+1)-x^2}{x+1}}}=\frac{1}{x-\dfrac{x}{\dfrac{x^2+x-x^2}{x+1}}}=\frac{1}{x-\dfrac{\frac{x}{1}}{\dfrac{x}{x+1}}}$$
$$=\frac{1}{x-\dfrac{x(x+1)}{x}}=\frac{1}{x-(x+1)}=\frac{1}{x-x-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

Finalmente:

$$\frac{1}{x-\dfrac{x}{x-\dfrac{x^2}{x+1}}}=-1$$

Ejemplo 28: *Racionalice las expresiones*

$$\text{a) } \frac{3x}{\sqrt{x+b}} \qquad \text{b) } \frac{2}{\sqrt{\sqrt{x}-1}}$$

Solución:

Parte a:

Racionalizar las expresiones puede parecer mecánico, sin embargo debe estar siempre atento pues en la parte b se percatará del detalle en el procedimiento.

Racionalizar consiste en «quitar» las raíces del numerador o del denominador, aplicando técnicas algebraicas.

La manera de deshacernos de la raíz en el caso a es haciendo que dicha raíz quede elevada al cuadrado y así, como usted bien sabe, la raíz se vaya con el cuadrado.

Multiplicamos entonces por le término $\sqrt{x+b}$ arriba y abajo:

$$\frac{3x}{\sqrt{x+b}} = \frac{3x\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+b}\sqrt{x+b}} = \frac{3x\sqrt{x+b}}{\left(\sqrt{x+b}\right)^2} = \frac{3x\sqrt{x+b}}{x+b}$$

Observe que la razón por la que la raíz desaparece es porque hemos multiplicado arriba y abajo por el término conveniente. Racionalizar se trata de encontrar el término conveniente.

Parte b:

Nuevamente, multiplicaremos por el término adecuado para poder eliminar las raíces.

$$\frac{2}{\sqrt{\sqrt{x}-1}} = \frac{2\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)^2} = \frac{2\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}-1}$$

Note que aún tenemos una raíz debajo, sin embargo está restada por uno número lo que significa que no podemos aplicar exactamente el mismo procedimiento que antes. Necesitamos obtener el término conveniente de forma distinta que antes.

Para poder deshacernos de la raíz multiplicaremos por lo que de ahora en adelante llamaremos el conjugado del denominador, el término:

$$\sqrt{x}+1$$

Este término es el mismo que el denominador de la fracción que hemos obtenido pero con el signo opuesto.

Multipliquemos arriba y abajo por este término:

$$\frac{2\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}-1} = \frac{2\sqrt{\sqrt{x}-1}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

Vea que en el denominador tenemos una diferencia de cuadrados, procedemos de acuerdo a ello:

$$= \frac{2\sqrt{\sqrt{x}-1}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1} = \frac{2\sqrt{\sqrt{x}-1}\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}$$

Finalmente note que para poder eliminar esta raíz se tuvo que elevar ambos términos al cuadrado a través de multiplicar el término adecuado para generar una diferencia de cuadrados y aplicar el correspondiente producto.

Ejercicios Propuestos

1-. Calcule $\dfrac{4}{\frac{4}{5}} - \dfrac{\frac{4}{5}}{4}$ **Respuesta:** $\dfrac{24}{5}$

2-. Calcule $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8}-\frac{1}{9}}$ **Respuesta:** 6

3-. Calcule $-\left[\dfrac{1}{5}+\left(\dfrac{-2}{3}\right)\right]\left[\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{\frac{5}{3}}{-\frac{3}{5}}\right)-\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right]$ **Respuesta:** $\dfrac{76}{45}$

4-. Calcule $\dfrac{-\left(\frac{2}{5}-\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)}{\frac{1}{2}-\dfrac{1}{1-\frac{2}{5}}}$ **Respuesta:** $-\dfrac{48}{35}$

5-. Calcule $\dfrac{\frac{4}{9}-\frac{3}{2}}{\frac{4}{9}+\frac{3}{2}} - \dfrac{16}{35}$ **Respuesta:** -1

6-. Simplifique y escriba de la forma más compacta posible las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{(10x^{-2}y)^2}{(50x^3y^{-1})^2}$ **Respuesta:** $\dfrac{y^4}{25x^{10}}$

b) $\left(\dfrac{sr^{-2}q^{-3}}{s^2r^3q^{-4}}\right)^{-3}$ **Respuesta:** $\dfrac{s^3r^{15}}{q^3}$

c) $(3ab^2c^{-6})\left(\dfrac{2a^2b}{c^3}\right)^{-2}$ **Respuesta:** $\dfrac{3}{4a^2}$

d) $\dfrac{a^{-1}b^{-1}}{a^{-3}-b^{-3}}$ **Respuesta:** $\dfrac{a^2b^2}{b^3-a^3}$

7-. Demuestre que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}$

8-. Simplifique las expresiones. Suponga la letras como positivas.

a) $\left(\sqrt[7]{\dfrac{a^8b^9}{c^2}}\right)^2$ **Respuesta:** $a^2b^2\sqrt[7]{\dfrac{a^2b^4}{c^4}}$

b) $\sqrt[4]{125h\sqrt{25h^6}}$ **Respuesta:** $5h$

9-. Demuestre que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

10-. Suponga que las letras que representan números positivos y simplifique

a) $\dfrac{(9st)^{\frac{3}{2}}}{(27s^3t^{-4})^{\frac{2}{3}}}$ **Respuesta:** $\dfrac{3t^4\sqrt[6]{t}}{\sqrt{s}}$

b) $\left(\dfrac{a^2b^{-3}}{x^{-1}y^2}\right)^3\left(\dfrac{x^{-2}b^{-1}}{a^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}}}\right)$ **Respuesta:** $\dfrac{xa^4\sqrt[4]{a}}{y^6b^{10}\sqrt[3]{y}}$

11-. Verifique que si n y q son números positivos

$$\left(\sqrt[4]{5m^{-\frac{2}{3}}n^4q^6}\sqrt[3]{2m^{\frac{1}{2}}n^3q^5}\right)^{-1}=\frac{1}{|n||q|^2nq\sqrt[12]{2000q^2}}$$

Sugerencia: Escriba las raíces como exponentes

12-. Calcule $\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}\right)^4$ **Respuesta:** $2+\sqrt{2}+2\sqrt{1+\sqrt{2}}$

13-. Desarrolle la expresión $\left(m^{-2}n^{\frac{1}{4}}-m^{-\frac{1}{2}}n^{-1}\right)^2$ **Respuesta:** $m^{-4}n^{\frac{1}{2}}-2m^{-\frac{3}{2}}n^{-\frac{3}{4}}+mn^{-2}$

14-. Desarrolle usando las fórmulas de productos notables

$$(x-1+x^2)(x-1-x^2)$$

Respuesta: $-x^4+x^2-2x+1$

15-. Demuestre que

$$(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2=4a^2b^2$$

16-. En cálculo diferencial, la derivada de la función $f(x)=(2x-1)^3(x+3)^{\frac{1}{2}}$ es

$$3(2x-1)^2(2)(x+3)^{\frac{1}{2}}+(2x-1)\left(\frac{1}{2}\right)(x+3)^{-\frac{1}{2}}$$

Factorice la expresión. **Respuesta:** $\dfrac{1}{2}(2x-1)(x+3)^{-\frac{1}{2}}(14x+35)$

17-. Factorice las expresiones

a) x^6-2x^3-3 **Respuesta:** $(x-\sqrt[3]{3})(x^2+\sqrt[3]{3}x+(\sqrt[3]{3})^2)(x+\sqrt[3]{3})(x^2-\sqrt[3]{3}x+(\sqrt[3]{3})^2)$

b) $a^4-(a+2)^2$ **Respuesta:** $(a-2)(a+1)(a^2+a+2)$

18-. Factorice x^4+x^2+1

Sugerencia: Sume y reste x^2 **Respuesta:** $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

19-. Factorice $x^{-\frac{3}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}$ **Respuesta:** $x^{-\frac{3}{2}}(x+1)^2$

20-. Simplifique a expresiòn:

$$\left[\frac{(a^2-ax)^2}{a^2+x^2}\cdot\frac{1}{a^3+a^2x}\right]\div\left[\frac{a^3-a^2x}{a^2+2ax+x^2}\cdot\frac{a^2-x^2}{a^3+ax^2}\right]$$

Respuesta: $\dfrac{1}{a}$

21-. Simplifique la expresión

$$\frac{x^2-x-12}{x^2-49}\cdot\frac{x^2-x-56}{x^2+x-20}\div\frac{x^2-5x-24}{x+5}$$

Respuesta: $\dfrac{1}{x-7}$

22-. Realice las operaciones correspondientes

a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

b) $\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{3}{ab}+\dfrac{4}{b^2}$

Respuestas: $\dfrac{x^2+x+1}{x^3}$; $\dfrac{2b^2-3ab+4a^2}{a^2b^2}$

23-. Simplifique la expresión

$$\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^m\left(a-\frac{1}{b}\right)^n}{\left(b+\frac{1}{a}\right)^m\left(b-\frac{1}{a}\right)^n}$$

Respuesta: $\dfrac{a^{m+n}}{b^{m+n}}$

24-. Simplifique la siguiente expresión que se usa en el cálculo (ej. Mate 1, 2)

$$\sqrt{1+\left(x^3-\frac{1}{4x^3}\right)^2}$$

Respuesta: $\dfrac{4x^6+1}{4x^3}$

25-. Racionalice las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x}{\sqrt[4]{(x+y)^3}}$ **Respuesta:** $\dfrac{x\sqrt[4]{x+y}}{x+y}$

b) $\dfrac{-2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$ **Respuesta:** $-\dfrac{2}{3}\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)$

c) $\dfrac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ **Respuesta:** $\sqrt{5}+4\sqrt{3}$

Bibliografía.

- **Stewart, J., Lothar, R. y Saleem, W.** (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (6a. ed.). Cengage Learning.
- **Rodríguez, A., Kuhn, C. y Leal, S.** (2015). *Manual de Matemáticas.*

Este material fue elaborado y tipeado en LaTeX por Isaac Vera y Miguel Ángel Labrador para uso de toda la comunidad académica.

Miguel Ángel Labrador
12-10423
Ingeniería Electrónica
Twitter: @miguelangel2801

Isaac J.J Vera
13-11469
Ingeniería Química
Correo: 13-11469@usb.ve

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece la notificación de errores o de tipeo a la dirección de correo **gecousb@gmail.com**.