Ejercicio 4 de Funciones

Isaac Vera

3 de septiembre de 2017

Parcial Enero-Marzo 2001 (Ejercicio 3, ?/30 puntos)

Considere las funciones:

$$f(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad x \in [-\pi, 3\pi] \quad ;$$

$$g(x) = x^2 - 8x + 7 \quad ; \quad h(x) = \sqrt{x}$$

a) Dibuje el gráfico de f. (? puntos)

b) Dibuje el gráfico de g. (? puntos)

c) Halle $\dfrac{h \circ f}{g}$ y determine su dominio. (? puntos)

Solución:

• Nota: la función inversa de coseno puede ser utilizada para despejar variables. Por ejemplo:

$$cos(b) = a \quad \Rightarrow \quad cos^{-1}[cos(b)] = cos^{-1}(a) \quad \Rightarrow \quad b = cos^{-1}(a)$$

a) Los puntos de corte con el eje x:

Si $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad cos^{-1}\left[cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = cos^{-1}(0)$

$\Rightarrow \quad x - \frac{\pi}{2} = cos^{-1}(0) \quad \Rightarrow \quad x = cos^{-1}(0) + \frac{\pi}{2} \quad (*)$

$cos^{-1}(0)$ se refiere a ¿cuándo la función coseno es igual a cero? Estudiando el comportamiento del coseno se sabe (se utiliza una variable "y"para no confundir con la de interés "x"):

y	...	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	...
$cos(y)$	...	-1	0	1	0	-1	0	1	0	...

Se puede observar que la función $cos(y)$ es igual a cero para distintos valores de x. Estos valores pueden ser generalizados al expresarlos con una sucesión:

$$y = \left\{ \cdots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \cdots \right\} = \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \right\} \qquad \forall k \in Enteros$$

Por lo tanto, el valor de $cos^{-1}(0)$ son todos los posibles números que cumplen que $cos(y) = 0$:

$$cos^{-1}(0) = \frac{(2k+1)\pi}{2} \qquad \forall k \in Enteros$$

Retomando la ecuación $(*)$ y sustituyendo el valor obtenido de $cos^{-1}(0)$:

$$x = cos^{-1}(0) + \frac{\pi}{2} = x = \frac{(2k+1)\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \left(\frac{2k+2}{2} \right) \pi = (k+1)\pi$$

Los valores de k que satisfacen la condición $x \in [-\pi, 3\pi]$ Los puntos de corte con el eje x están dados para $x = (k+1)\pi \quad \forall k \in Enteros \quad$ y $\quad x \in [-\pi, 3\pi]$.

• Nota: se debe tener en cuenta que $cos(x)$ es una función par y $sen(x)$ es una función impar, por lo tanto se cumple:

$$cos(-x) = cos(x)$$

$$sen(-x) = -sen(x)$$

Puntos de corte con el eje y:

Si $x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = cos\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) = cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

También se prueban otros puntos de fácil cálculo para apreciar el comportamiento de la función. Resumen de puntos de importancia:

x	$f(x)$
$(k+1)\pi$	0
0	0
$-\pi/2$	-1
$\pi/2$	1
$3\pi/2$	-1
$5\pi/2$	1

Con esta información se dibuja el gráfico de la función f:

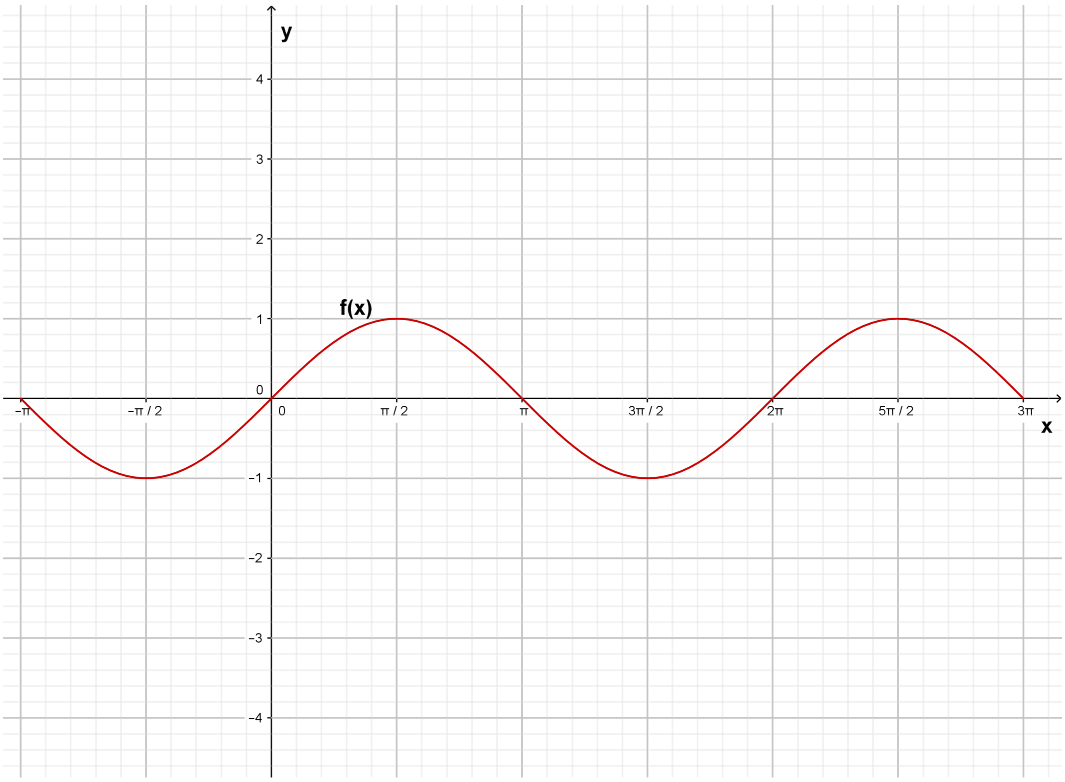

Figura 1: $f(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) Puntos de corte con el eje x:

$$g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 8x + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-7) = 0$$

Puntos de corte con el eje y:

$$g(0) = 0^2 - 8(0) + 7 = 7$$

Para ubicar el punto mínimo de la parábola, se debe llegar a una expresión de la forma:

$$y - y_0 = (x - x_0)^2$$

Donde el punto mínimo es (x_0, y_0).

Para llevar la ecuación de la parábola dada a su expresión que provee el punto mínimo, basta con completar cuadrados y manipulación algebraica:

$$g(x) = x^2 - 8x + 7 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 7 = x^2 - 8x + 16 - 9 = (x-4)^2 - 9$$

$$\Rightarrow \quad g(x) + 9 = (x-4)^2$$

Por lo tanto el punto mínimo de la parábola es $(4, -9)$

Resumen de puntos de importancia:

x	$g(x)$
1	0
7	0
0	7
4	-9

Dibujo de la gráfica de g:

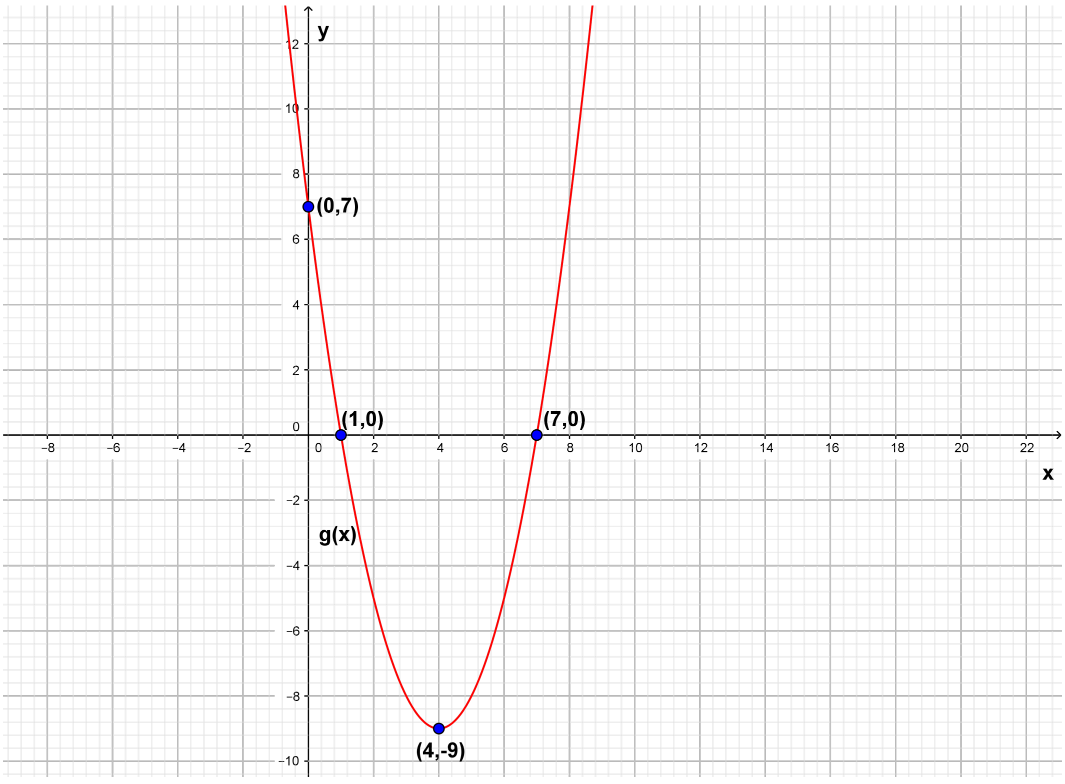

Figura 2: $g(x) = x^2 - 8x + 7$

c)

$$\frac{h \circ f}{g} = \frac{h(f(x))}{g} = \frac{\sqrt{cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}}{x^2 - 8x + 7}$$

Se estudia la parte interna de la raíz cuadrada (debe ser mayor o igual a cero para que su solución pertenezca al plano real):

$$cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$$

Al observar el gráfico de $f(x)$ se puede apreciar que esta función es mayor o igual a cero para el intervalo $[0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi]$. Asimismo, se sabe que el denominador debe ser distinto de cero:

$$x^2 - 8x + 7 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 \neq 1 \\ x_2 \neq 7 \end{cases}$$

Finalmente, se tiene el dominio:

$$Dom\left(\frac{h \circ f}{g}\right) = [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] - \{1, 7\} = [0, 1) \cup (1, \pi] \cup [2\pi, 7) \cup (7, 3\pi]$$