Ejercicio 6 de Valor Absoluto

Isaac Vera

23 de septiembre de 2017

Primer Parcial Verano 2016 (Ejercicio 4, 8/30 puntos)

Encuentre el dominio de:

$$f(x) = \frac{4}{|9 - x^2|} - \sqrt{\frac{-x^2 - x + 2}{2x + 1}}$$

Solución: para encontrar el dominio se debe tener en cuenta que la expresión dentro de la raíz cúbica debe ser mayor o igual a cero, porque de lo contrario no pertenece a los números reales. También se debe estudiar a parte la expresión con valor absoluto. Por otro lado, observando los denominadores, se puede notar que $x \neq 3$, $x \neq -3$ y $x \neq -\dfrac{1}{2}$ para el dominio de $f(x)$.

• Se estudia la parte interna a la raíz:

$$\frac{-x^2 - x + 2}{2x + 1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -\left(\frac{x^2 + x - 2}{2x + 1}\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 + x - 2}{2x + 1} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x + 2)(x - 1)}{2x + 1} \leq 0$$

Ceros del numerador: $x = -2$ y $x = 1$

Ceros del denominador: $x = -\dfrac{1}{2}$

Ahora se estudian los cambios de signos:

	$-\infty$	-2	$-1/2$	1 $\quad\infty$
$x + 2$	-	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	+
$2x + 1$	-	-	+	+
$\dfrac{(x + 2)(x - 1)}{2x + 2}$	-	+	-	+

Entonces se concluye que para la parte interna de la raíz:

$$Dom_1 = (-\infty, -2] \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right]$$

• Ahora se estudia $|9 - x^2|$:

$$\left|9 - x^2\right| = \begin{cases} 9 - x^2 & , \text{si } 9 - x^2 \geq 0 \qquad \text{(I)} \\ -(9 - x^2) & , \text{si } 9 - x^2 < 0 \qquad \text{(II)} \end{cases}$$

Caso I:

$$9 - x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 > -9 \quad \Rightarrow \quad x^2 < 9 \quad \Rightarrow \quad x < \pm\sqrt{9} \quad \Rightarrow \quad x < \pm 3$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x < 3 \\ x < -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Dom_I = (-\infty, -3) \cup (-\infty, 3) = (-\infty, 3)$$

Caso II:

$$9 - x^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 < -9 \quad \Rightarrow \quad x^2 > 9 \quad \Rightarrow \quad x > \pm\sqrt{9} \quad \Rightarrow \quad x > \pm 3$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x > 3 \\ x > -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Dom_{II} = (-3, \infty) \cup (3, \infty) = (-3, \infty)$$

Por lo tanto, el dominio de la parte de estudiada es la unión de caso I y II, y las dos formas de escribir el resultado son (las útimas dos):

$$Dom_2 = Dom_I \cup Dom_{II} = (-\infty, 3) \cup (-3, \infty) = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$$

$$= (-\infty, \infty) - \{-3, 3\} = \Re - \{-3, 3\}$$

• Finalmente, el dominio del f(x) es la intercepción entre el Dom_1 y Dom_2:

$$Dom_{f(x)} = Dom_1 \cap Dom_2 = \left[(-\infty, -2] \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right]\right] \cap [(-\infty, 3) \cup (-3, \infty)]$$

$$= (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty) = (-\infty, -3) \cup (-3, -2] \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right]$$