

Ejercicio 5 de Valor Absoluto

Isaac Vera

23 de septiembre de 2017

Primer Parcial Verano 2016 (Ejercicio 1, 8/30 puntos)

Hallar y graficar el conjunto solución de la desigualdad:

$$||x - 4| - |x|| < 1$$

Solución: Tenga en cuenta las siguiente propiedad de valor absoluto.

$$|a| < c \quad \Rightarrow \quad -c < a < c$$

Sabiendo esto, se tiene que:

$$||x - 4| - |x|| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < |x - 4| - |x| < 1$$

Ahora se define cada valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ si } x \geq 0 & \text{(i)} \\ -x & , \text{ si } x < 0 & \text{(ii)} \end{cases}$$

$$|x - 4| = \begin{cases} x + 4 & , \text{ si } x \geq 4 & \text{(iii)} \\ -(x - 4) & , \text{ si } x < 4 & \text{(iv)} \end{cases}$$

CASO 1: (i) y (iii)

$$Dom_1 = Dom_i \cap Dom_{iii} = [0, \infty) \cap [4, \infty) = [4, \infty)$$

Para Dom_1 , $|x| = x$ y $|x - 4| = x - 4$, entonces se sustituye en la inecuación:

$$-1 < |x - 4| - |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x - 4 - x < 1 \quad \Rightarrow$$

$$-1 < -4 < 1 \quad (\text{Contradicción})$$

Como se ha llegado a una contradicción, entonces la solución al caso 1 es vacío:

$$Sol_1 = \emptyset$$

CASO 2: (i) y (iv)

$$Dom_2 = Dom_i \cap Dom_{iv} = [0, 4)$$

$$-1 < |x - 4| - |x| < 1 \Rightarrow -1 < -(x - 4) - x < 1 \Rightarrow$$

$$-1 < -x + 4 - x < 1 \Rightarrow -5 < -2x < -3 \Rightarrow 5 > 2x > 3 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{2} > x > \frac{3}{2} \Rightarrow x \in \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Por lo tanto, la solución al caso 2 será la intersección entre este intervalo y el Dom_2 :

$$Sol_2 = [0, 4) \cap \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

CASO 3: (ii) y (iii)

$$Dom_3 = Dom_{ii} \cap Dom_{iii} = \emptyset \Rightarrow Sol_3 = \emptyset$$

CASO 4: (ii) y (iv)

$$Dom_4 = Dom_{ii} \cap Dom_{iv} = \emptyset = (-\infty, 0)$$

$$-1 < |x - 4| - |x| < 1 \Rightarrow -1 < -(x - 4) - (-x) < 1 \Rightarrow$$

$$-1 < -x + 4 + x < 1 \Rightarrow -1 < 4 < 1 \quad (\text{Contradicción})$$

Como se ha llegado a una contradicción, entonces la solución al caso 1 es vacío:

$$Sol_4 = \emptyset$$

Finalmente, la solución al ejercicio será la unión de los cuatro casos:

$$Sol_{Final} = Sol_1 \cup Sol_2 \cup Sol_3 \cup Sol_4 = \emptyset \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \cup \emptyset \cup \emptyset = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Se grafica:

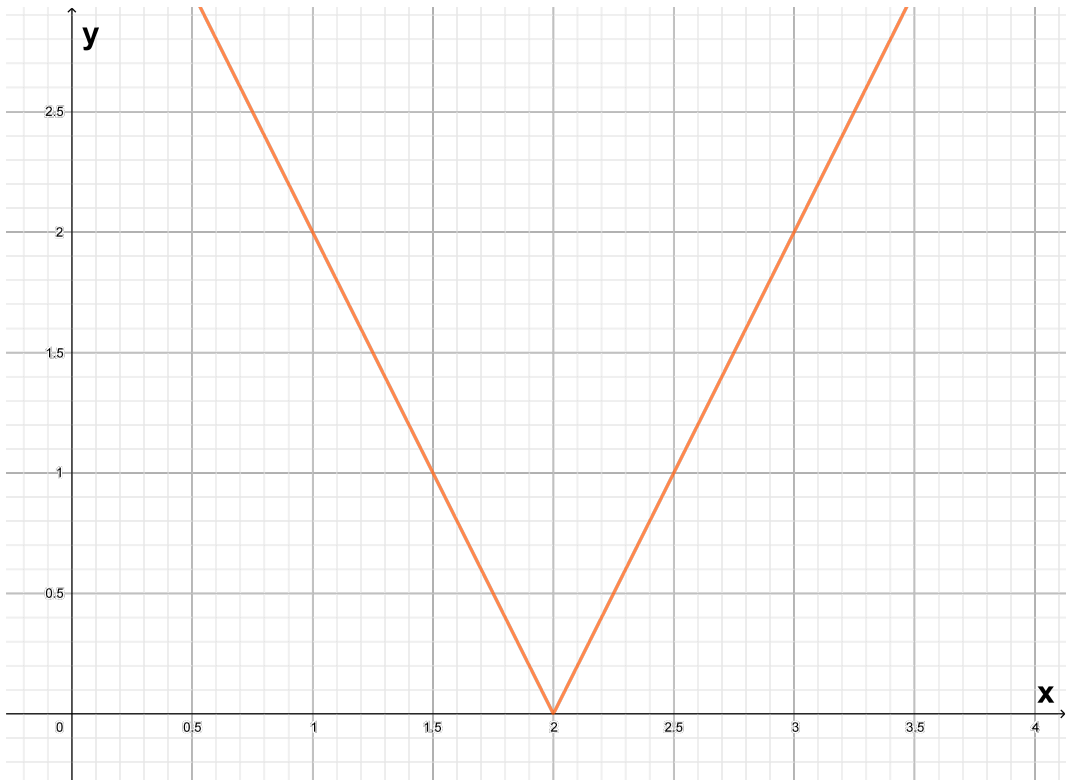


Figura 1: $f(x) = ||x - 4| - |x||$

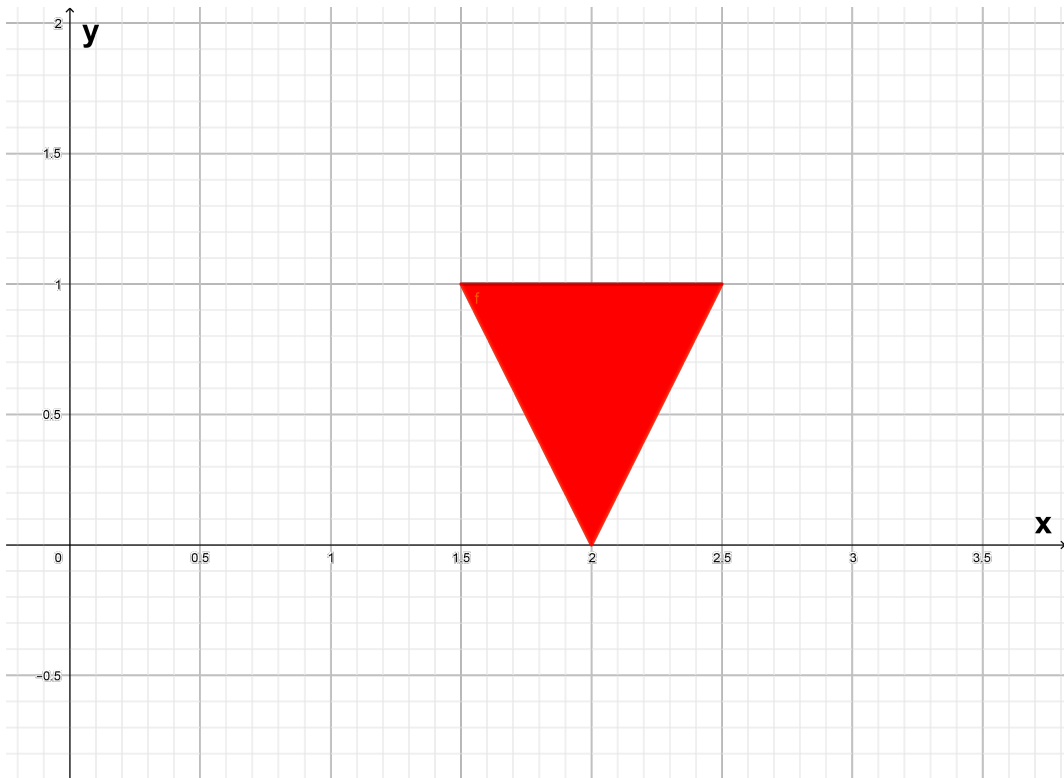


Figura 2: $f(x) = ||x - 4| - |x|| < 1$