Ejercicio de Valor Absoluto 4

Isaac Vera

23 de septiembre de 2017

Primer Parcial Septiembre-Diciembre 2000 (Ejercicio 2, 7/30 puntos)

Determinar todos los valores de x que satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\left|2 - \frac{1}{5x-1}\right| \geq 1$$

Solución: Se puede resolver de varias formas. A continuación se presentarán dos formas diferentes:

FORMA 1: Este camino es más largo. Primero se debe realizar manipulación algebraíca de modo que se obtengan expresiones simples para definir el valor absoluto. Luego se podrá resolver como se ha hecho con los ejercicios anteriores (2 o 4 casos según dependiendo del número de veces que se defina el valor absoluto).

Nota: recuerde la propiedad

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$\left|2 - \frac{1}{5x-1}\right| = \left|\frac{10x-2-1}{5x-1}\right| = \left|\frac{10x-3}{5x-1}\right| = \frac{|10x-3|}{|5x-1|} = \frac{\left|10\left(x-\frac{3}{10}\right)\right|}{\left|5\left(x-\frac{1}{5}\right)\right|} =$$

$$\frac{|10|\left|x-\frac{3}{10}\right|}{|5|\left|x-\frac{1}{5}\right|} = \frac{10\left|x-\frac{3}{10}\right|}{5\left|x-\frac{1}{5}\right|} = \frac{2\left|x-\frac{3}{10}\right|}{\left|x-\frac{1}{5}\right|} \geq 1$$

Se define cada valor absoluto:

$$\left|x-\frac{3}{10}\right| = \begin{cases} x-\dfrac{3}{10} & \text{, si} \quad x \geq \dfrac{3}{10} \qquad (i) \\ \\ -(x-\dfrac{3}{10}) & \text{, si} \quad x < \dfrac{3}{10} \qquad (ii) \end{cases}$$

$$\left|x-\frac{1}{5}\right| = \begin{cases} x-\dfrac{1}{5} & \text{, si} \quad x \geq \dfrac{1}{5} \qquad (iii) \\ \\ -(x-\dfrac{1}{5}) & \text{, si} \quad x < \dfrac{1}{5} \qquad (iv) \end{cases}$$

Ahora se resuelven los cuatro casos como ya se ha hecho en ejercicios anteriores, y la solución será la unión de la solución de cada caso...

FORMA 2: Este camino es más corto.

Nota: recuerde la propiedad:

$$|a| \geq b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a \leq -b \\ a \geq b \end{cases}$$

Para este caso, $b = 1$ y $a = 2 - \dfrac{1}{5x-1}$; por lo tanto:

$$\left|2-\frac{1}{5x-1}\right| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2-\dfrac{1}{5x-1} \leq -1 \qquad (1) \\ \\ 2-\dfrac{1}{5x-1} \geq 1 \qquad (2) \end{cases}$$

CASO 1:

$$2-\frac{1}{5x-1} \leq -1 \quad \Rightarrow \quad 2-\frac{1}{5x-1}+1 \leq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{10x-2-1+5x-1}{5x-1} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{15x-4}{5x-1} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{15\left(x-\dfrac{4}{15}\right)}{5\left(x-\dfrac{1}{5}\right)} \leq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{3\left(x-\dfrac{4}{15}\right)}{\left(x-\dfrac{1}{5}\right)} \leq 0$$

Ceros del numerador: $x = \dfrac{4}{15}$

Ceros del denominador: $x = \dfrac{1}{5}$

Se estudian los intervalos de signos:

	$-\infty$	$1/5$	$4/15$ ∞
$x - \dfrac{4}{15}$	-	-	+
$x - \dfrac{1}{5}$	-	+	+
$\dfrac{3\left(x-\dfrac{4}{15}\right)}{\left(x-\dfrac{1}{5}\right)}$	+	-	+

De acuerdo con la tabla, se concluye que:

$$Sol_1 = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{15}\right]$$

CASO 2:

$$2 - \frac{1}{5x-1} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{1}{5x-1} - 1 \geq 0$$

$$2 - \frac{1}{5x-1} - 1 = \frac{10x - 2 - 1 - 5x + 1}{5x-1} = \frac{5x-2}{5x-1} = \frac{5\left(x-\dfrac{2}{5}\right)}{5\left(x-\dfrac{1}{5}\right)}$$

$$= \frac{x-\dfrac{2}{5}}{x-\dfrac{1}{5}} \geq 0$$

Ceros del numerador: $x = \dfrac{2}{5}$

Ceros del denominador: $x = \frac{1}{5}$

Se estudian los intervalos de signos:

	$-\infty$	$1/5$	$2/5$ ∞
$x - \frac{2}{5}$	-	-	$+$
$x - \frac{1}{5}$	-	$+$	$+$
$\frac{x - \frac{2}{5}}{x - \frac{1}{5}}$	-	$+$	-

De acuerdo con la tabla, se concluye que:

$$Sol_2 = \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup \left[\frac{2}{5}, \infty\right)$$

Por lo tanto, la solución final será la unión de las solución al caso 1 y al caso 2:

$$Sol_{Final} = Sol_1 \cup Sol_2 = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{15}\right] \cup \left[\left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup \left[\frac{2}{5}, \infty\right)\right]$$

$$Sol_{Final} = \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{15}\right] \cup \left[\frac{2}{5}, \infty\right)$$