Ejercicio 3 de Valor Absoluto

Isaac Vera

23 de septiembre de 2017

Primer Parcial Enero-Marzo A6 1995 (Ejercicio 2, 7/30 puntos)

Resuelva:

$$|x+2| < 1 + |x-1|$$

Solución: Se define por separado cada valor absoluto presente, para luego estudiar las cuatro posibilidades (4 casos) que se deben considerar:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{, si} \quad x \geq -2 \quad (i) \\ -(x+2) & \text{, si} \quad x < -2 \quad (ii) \end{cases}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{, si} \quad x \geq 1 \quad (iii) \\ -(x-1) & \text{, si} \quad x < 1 \quad (iv) \end{cases}$$

Definiendo los casos se tiene:

CASO 1, se interceptan los dominios de (i) y (iii) para determinar el nuevo dominio a considerar:

$$Dom_1 = [-2, \infty) \cap [1, \infty) = [1, \infty)$$

En dicho dominio se cumple que $|x+2| = x+2$ y $|x-1| = x-1$, de esta forma se pueden sustituir estas expresiones en la inecuación:

$$x+2 < 1+x-1 \quad \Rightarrow \quad x-x < 0-2 \quad \Rightarrow \quad 0 < -2 \qquad \text{(contradicción)}$$

Como se ha llegado ha una contradicción, esto significa que no existe valor de x que satisfaga la inecuación, por lo tanto:

$$Sol_1 = \emptyset$$

CASO 2, se interceptan los dominios de (i) y (iv) para determinar el nuevo dominio a considerar:

$$Dom_2 = [-2, \infty) \cap (-\infty, 1) = [-2, 1)$$

Para Dom_2, se cumple que $|x+2| = x+2$ y $|x-1| = -(x-1)$, y de esta forma se pueden sustituir estas expresiones en la inecuación:

$$x + 2 < 1 - (x-1) \quad \Rightarrow \quad x < 1 - x + 1 - 2 \quad \Rightarrow \quad 2x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$$

Ahora este resultado se intercepta con el dominio del caso correspondiente:

$$Sol_2 = (-\infty, 0) \cap [-2, 1) = [-2, 0)$$

CASO 3, se interceptan los dominios de (ii) y (iii) para determinar el nuevo dominio a considerar:

$$Dom_3 = (-\infty, -2) \cap [1, \infty) = \emptyset$$

Como el dominio del caso 3 es vacío, entonces no es necesario manipular la inecuación porque al interceptar su solución con el dominio, igual su resultado será vacío, por lo tanto:

$$Sol_3 = \emptyset$$

CASO 4, se interceptan los dominios de (ii) y (iv) para determinar el nuevo dominio a considerar:

$$Dom_4 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, 1) = (-\infty, -2)$$

Para Dom_4, se cumple que $|x+2| = -(x+2)$ y $|x-1| = -(x-1)$, de esta forma se pueden sustituir estas expresiones en la inecuación:

$$-(x+2) < 1-(x-1) \quad \Rightarrow \quad -x-2 < 1-x+1 \quad \Rightarrow \quad x-x < 2+2 \quad \Rightarrow \quad 0 < 4$$

Como se obtuvo una expresión que es verdadera para $x \in \Re$, o dicho de otra forma para $x \in (-\infty, \infty)$, entonces tal intervalo es la solución a esa inecuación. Ahora se intercepta esta solución con el Dom_4 para hallar la solución a este caso:

$$Sol_4 = (-\infty, \infty) \cap (-\infty, -2) = (-\infty, -2)$$

Para terminar, la solución al ejercicio será la unión de las soluciones de los cuatro casos:

$$Sol_{Final} = Sol_1 \cup Sol_2 \cup Sol_3 \cup Sol_4 = \emptyset \cup [-2, 0) \cup \emptyset \cup (-\infty, -2) = (-\infty, 0)$$