Ejercicio 2 de Valor Absoluto

Isaac Vera

23 de septiembre de 2017

Primer Parcial Enero-Marzo 2001 (Ejercicio 1, 8/30 puntos)

Resuelva la siguiente desigualdad:

$$\frac{|x^2 - 3x - 1|}{|x + 2|} < 3$$

Solución: Este ejercicio se puede hacer de varias formas, por ejemplo, se pueden definir ambos valores absolutos por separado (el del numerador y el del denominador), sin embargo sería un procedimiento algo largo. Se presenta a continuación como aprovecharse de las propiedades de valor absoluto para resolver este ejercicio en menos tiempo (a veces es necesario pensar así para terminar el parcial).

Por propiedades de valor absoluto, se sabe que:

$$\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right| \tag{1}$$

$$|A| < C \quad \Rightarrow \quad -C < A < C \tag{2}$$

Utilizando propiedades (i) y (ii), podemos reescribir la inecuación de la forma:

$$\frac{|x^2 - 3x - 1|}{|x + 2|} < 3 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x^2 - 3x - 1}{x + 2}\right| < 3 \quad \Rightarrow \quad -3 < \frac{x^2 - 3x - 1}{x + 2} < 3$$

De este modo, el problema se reduce a resolver ambas inecuaciones e interceptar sus soluciones:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x + 2} > -3 \\ \\ \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x + 2} < 3 \end{cases}$$

Caso 1:

$$\frac{x^2-3x-1}{x+2} > -3 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-3x-1}{x+2} + 3 > 0 \quad \Rightarrow$$
$$\frac{x^2-3x-1+3x+6}{x+2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+5}{x+2} > 0$$

El numerador no tiene raíces reales (o ceros), es decir, x^2+5 siempre es positivo, porque x^2 es positivo para cualquier valor de x y además se le suma un número positivo, esto se argumenta de esta manera:

$$x^2+5=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=-5 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{-5} \quad \Rightarrow \quad x \notin \mathbb{R}$$

Por lo tanto el numerador siempre es positivo.

Sin embargo, el denominador tiene un cero, y por lo tanto cambia de signo según el valor de x, y como en este caso interesa cuando la fracción es positiva (mayor estricto que cero), entonces:

$$x+2>0 \quad \Rightarrow \quad x>-2 \quad \Rightarrow \quad x \in (-2,\infty)$$

Por lo tanto: $Sol_1 = (-2,\infty)$

Caso 2:

$$\frac{x^2-3x-1}{x+2} < 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-3x-1}{x+2} - 3 < 0 \quad \Rightarrow$$
$$\frac{x^2-3x-1-3x-6}{x+2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-6x-7}{x+2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-7)(x+1)}{x+2} < 0$$

Se estudian los ceros:

Ceros del numerador: $x=7$ y $x=-1$ Ceros del denominador: $x=-2$

Como hay 3 ceros que generan cambio de signo, es recomendable hacer un estudio de signos:

	$-\infty$	-2	-1	7	∞
$x-7$	-	-	-	-	
$x+1$	-	-	+	+	
$x+2$	-	+	+	+	
$\frac{(x-7)(x+1)}{x+2}$	-	+	-	+	

Como se puede observar en la tabla de estudio de signos, la inecuación se cumple para:

$$Sol_2 = (-\infty, -2) \cup (-1, 7)$$

Por lo tanto, la solución al ejercicio esta dado por la intersección del caso 1 y el caso 2:

$$Sol_{Final} = Sol_1 \cap Sol_2 = (-2, \infty) \cap [(-\infty, -2) \cup (-1, 7)] = (-1, 7)$$