Ej 1

Isaac Vera

22 de julio de 2017

Parcial Enero-Marzo tipo A 2004 (Ejercicio 1, 8/30 puntos)

Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{|x+4|-x}{-x+2} > 1$$

Solución: De antemano, se debe estudiar el denominador de la fracción, de lo que concluimos que $x \neq 2$. Ahora se procede con la definición de valor absoluto:

$$|x+4| = \begin{cases} x+4 & , \text{si } x \geq -4 \qquad (1) \\ \\ -(x+4) & , \text{si } x < -4 \qquad (2) \end{cases}$$

Se estudian los casos (1) y (2) por separado, luego la unión de las soluciones de ambos casos será la solución al ejercicio:

Caso (1), cuando $x \geq -4$, se tiene que $|x+4| = x+4$; sustituyendo en la inecuación y resolviendo:

$$\frac{x+4-x}{-x+2} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{-x+2} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{-x+2} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4-(-x+2)}{-x+2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4+x-2}{-x+2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+2}{-x+2} > 0$$

Ahora teniendo una inecuación más simplificada, se puede observar que $x = -2$ es un cero del numerador y $x = 2$ es un cero del denominador, es decir, es probable que haya cambios de signos para la imagen de esta fracción con valores de $x \epsilon \Re$, sin embargo, en este caso solo es de interés cuando la fracción es mayor estricto que cero. Dicho esto se procede a estudiar los signos de los intervalos de la expresión:

	$-\infty$	-2	2	∞
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$-x+2$	$+$	$+$	$-$
$\dfrac{x+2}{-x+2}$	$-$	$+$	$-$

Como se puede observar en el estudio de signos, la inecuación se cumple para el intervalo $x\epsilon(-2,2)$. La solución al caso 1 será la intercepción del intervalo encontrado y la restricción $x \geq -4$:

$$Sol_1 = [-4,\infty) \cap (-2,2) = (-2,2)$$

Caso (2), cuando $x < -4$, se tiene que $|x+4| = -(x+4)$; sustituyendo en la inecuación y resolviendo:

$$\frac{-x-4-x}{-x+2} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-2x-4}{-x+2} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-2x-4}{-x+2} - 1 > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2x+4}{x-2}\left(\frac{-1}{-1}\right) - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x+4}{x-2} - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x+4-(x-2)}{x-2} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+6}{x-2} > 0$$

Con esta inecuación más simplificada se puede observar que $x = -6$ es un cero del numerador y $x = 2$ es un cero del denominador, es decir, es probable que haya cambios de signos para la imagen de esta fracción con valores de $x\epsilon\Re$, sin embargo, en este caso solo es de interés cuando la fracción es mayor estricto que cero. Dicho esto se procede a estudiar los signos de los intervalos de la expresión:

	$-\infty$	-6	2	∞
$x+6$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{x+6}{x-2}$	$+$	$-$	$+$

Como se puede observar en el estudio de signos, la inecuación se cumple para el intervalo $x\epsilon(-\infty,-6)\cup(2,\infty)$. La solución al caso 2 será la intercepción del intervalo encontrado y la restricción $x < -4$:

$$Sol_2 = [(-\infty,-6) \cup (2,\infty)] \cap (-\infty,-4) = (-\infty,-6)$$

Por lo tanto, la solución al ejercicio será la unión de las soluciones de los casos 1 y 2:

$Sol_{final} = Sol_1 \cup Sol_2 = (-\infty, -6) \cup (-2, 2)$