Ejercicio 4 de Plano Cartesiano

Isaac Vera

25 de septiembre de 2017

Primer Parcial Intensivo 2016 (Ejercicio 2, 8/30 puntos)

(a) (4 pts.)Hallar los puntos A y B de intersección de dos circunferencias, C_1 y C_2, cuyas ecuaciones son $C_1 : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ y
$C_2 : x^2 + y^2 + x + y - 8 = 0$.
(b) (4 pts.) Pruebe que los puntos de los centros de la circunferencia C_1 y C_2 y el punto medio entre A y B están en la misma recta.

Solución:

(a) Para hallar la intersección entre ambas curvas se procede a resolver el sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + x + y - 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 - (x^2 + y^2 + x + y - 8) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -3x + 3y - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x + 1 \quad (3)$$

La ecuación (3) es la recta que pasa por A y B. Ahora se sustituye esta ecuación en la (1) o la (2) para obtener valores coordenados:

$$(2) \quad \Rightarrow \quad x^2 + x + 1^2 + x + (x + 1) - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 4x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 3)(x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x_1 en (3) $\quad \Rightarrow \quad y_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad A = (-3, -2)$
Sustituyendo el valor de x_2 en (3) $\quad \Rightarrow \quad y_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad B = (1, 2)$

(b) Se hallan los centros de C_1 y C_2. Para esto se debe escribir cada circunferencia en su forma genérica, donde (x_0, y_0) es el centro y r es el radio:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Para llevar las ecuaciones dadas a esta forma, se debe realizar un método conocido como completar cuadrados:

$C_1 : x^2 - 2x + y^2 + 4y - 11 = 0$

$$\Rightarrow \quad C_1 : x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 + y^2 + 4y + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 11 = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_1 : x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 11 = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_1 : (x-1)^2 + (y+2)^2 - 1 - 4 - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

C_1 es una circunferencia de radio 4 centrada en $P_{C_1} = (1, -2)$

$C_2 : x^2 + y^2 + x + y - 8 = 0$

$$\Rightarrow \quad C_2 : x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_2 : x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{2}$$

C_2 es una circunferencia de radio $\sqrt{\dfrac{17}{2}}$ centrada en $P_{C_2} = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

Ahora se determinan los puntos medios de interés:

• Punto medio entre dos puntos de coordenadas (x_1, y_2) y (x_2, y_2):

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \ , \ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Punto medio entre A y B:

$$M = \left(\frac{1 + (-3)}{2} \ , \ \frac{2 + (-2)}{2} = (-1, 0)\right)$$

• Ecuación de la recta que pasa por dos puntos de coordenadas (x_1, y_2) y (x_2, y_2):

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

Por lo tanto, la recta que pasa por los puntos P_{C_1} y P_{C_2} es:

$$L : y - (-2) = \left(\frac{-\frac{1}{2} - (-2)}{-\frac{1}{2} - 1} \right) (x - 1) \quad \Rightarrow \quad L : y + 2 = \left(\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}} \right) (x - 1)$$

$$\Rightarrow \quad L : y + 2 = -x + 1 \quad \Rightarrow \quad L : y + x + 1 = 0$$

Finalmente, para probar si el punto medio entre A y B (punto M) pertenece a la recta L, basta con sustituir sus coordenadas en la x y y de la ecuación, si esta mantiene la igualdad, pertenece, de lo contrario no pertenece:

$$y + x + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$$

Como la ecuación mantiene una igualdad coherente, entonces el punto medio entre A y B si pertenece a la recta que pasa por los puntos P_{C_1} y P_{C_2}.

• Extra: Graficar.

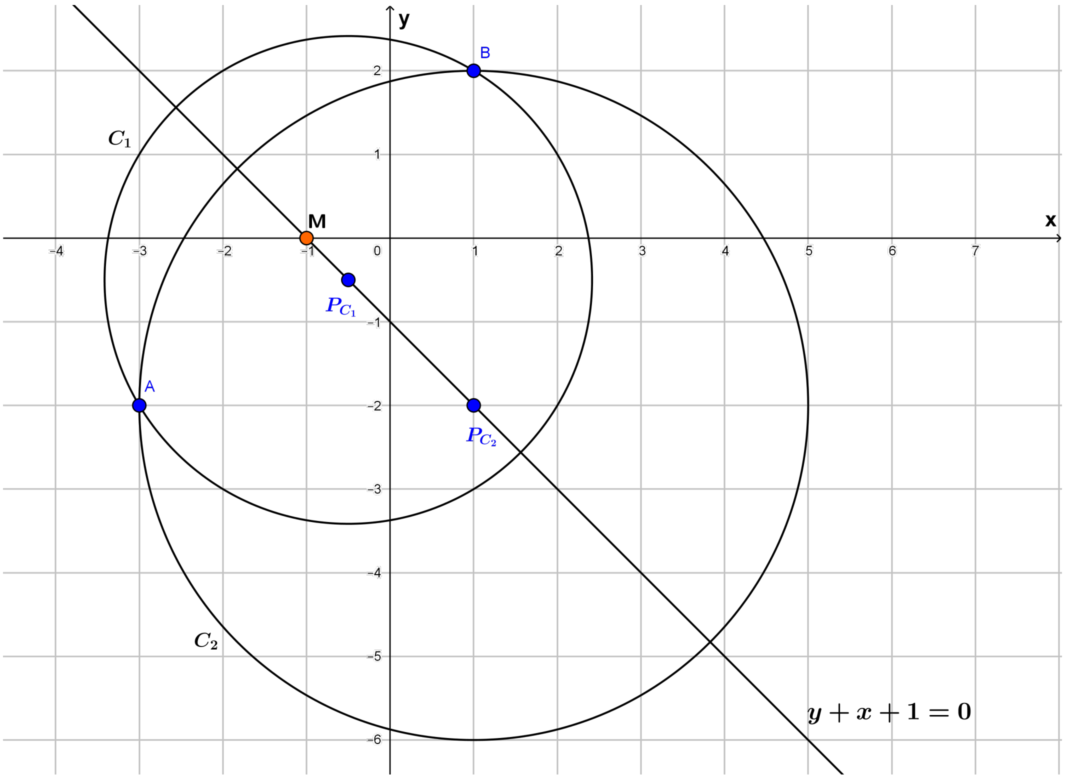

Figura 1: Recta, Circunferencias y Puntos de Interés