Ej 2 Plano Cartesiano

Isaac Vera

16 de septiembre de 2017

Parcial Enero-Marzo 2004 (Ejercicio 2, 10/30 puntos)

Dado los vértices $A = (0, 0)$; $B = (3, 0)$ Y $C = (0, 2)$ el cual se ilustra en la figura siguiente:

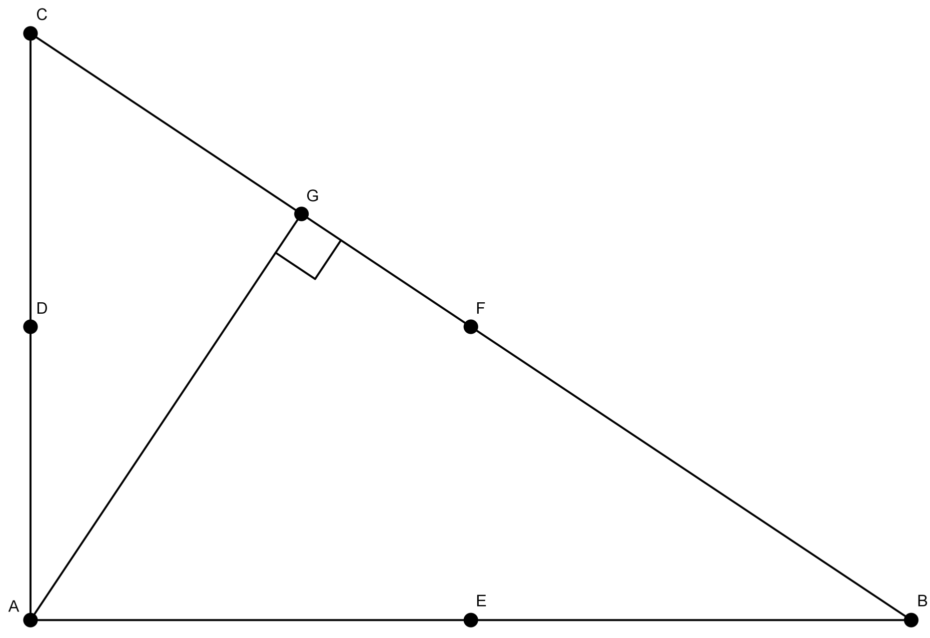

Figura 1: Figura resultante de los puntos A, B, C

a) Encuentre los puntos medios D, E y F de los vértices.

b) Encuentre al punto G.

c) Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios D, E y F de los vértices.

d) Verifique que el punto G pertenece a la circunferencia encontrada en el literal anterior.

Solución:

a) • Punto medio entre dos puntos de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$M = \left(\frac{x_0 + x_1}{2} \ , \ \frac{y_0 + y_1}{2} \right)$$

Por lo tanto:

$$D = \left(\frac{0+0}{2} \ , \ \frac{0+2}{2} \right) = (0, 1)$$

$$E = \left(\frac{0+3}{2} \ , \ \frac{0+0}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 0 \right)$$

$$F = \left(\frac{0+3}{2} \ , \ \frac{2+0}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 1 \right)$$

b) Para encontrar el punto G, se necesita la recta BC, porque de la intersección de la misma con la recta AG resulta el punto G:

• Ecuación de una recta conociendo dos puntos (que pertenezcan a la recta) de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), con (x_0, y_0) un punto cualquiera perteneciente a dicha recta (que podrían ser (x_1, y_1) o (x_2, y_2)):

$$(y - y_0) = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_0)$$

Aplicando la ecuación mostrada:

$$\ell_{BC} : (y - C_y) = \left(\frac{C_y - B_y}{C_x - B_x} \right) (x - C_x) \quad \Rightarrow \quad (y - 2) = \left(\frac{2 - 0}{0 - 3} \right) (x - 0)$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x + 2$$

Como $AG \perp BC$ (son segmentos perpendiculares, las rectas a las que pertenecen cumple:

$$m_{AG} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{\left(-\frac{2}{3} \right)} = \frac{3}{2}$$

Asimismo, se sabe qye esta recta pasa por $A = (0, 0)$, por lo tanto la ecuación de la recta viene dada por:

$$\ell_{AG} : y - 0 = \frac{3}{2}(x - 0) \quad \Rightarrow \quad \ell_{AG} : y = \frac{3}{2}x$$

Ahora se tiene la ecuación de las rectas de cuya intersección se resulta el punto G:

$$\begin{cases} \ell_{BC} : y = -\dfrac{2}{3}x + 2 \\ \\ \ell_{AG} : y = \dfrac{3}{2}x \end{cases}$$

$$\ell_{AG} - \ell_{BC} : y - y = \frac{3}{2}x - \left(-\frac{2}{3}x + 2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}x = 2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{9x + 4x}{6} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{13}{6}x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{13}$$

Se sustituye el valor de x en cualquiera de las ecuaciones de las rectas para obtener la componente y del punto G:

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)\frac{12}{13} = \frac{18}{13}$$

Finalmente, el punto G será:

$$G = \left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right)$$

c) Como la circunferencia buscada pasa por los puntos D, E y F, se sabe que por definición la ecuación de la circunferencia debe cumplirse para todo punto que se sustituya en sus coordenadas, es decir en la coordenada x y y.

• Ecuación de la circunferencia:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Donde r es el radio de la circunferencia centrada en el punto (x_0, y_0). Teniendo en cuenta que tanto el radio de la circunferencia como su centro son desconocidos, se debe proceder a un trabajo de manipulación algebraica con las tres ecuaciones que resultan de sustituir los valores de D, E y F en la ecuación genérica. Dichos puntos cumplen con la ecuación porque pertenecen a la circunferencia:

Sustituir valor del punto $D = (0,1)$:

$$(0 - x_0)^2 + (1 - y_0)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad {x_0}^2 + 1 - 2y_0 + y_0^2 = r^2$$

Sustituir valor del punto $E = (3/2, 0)$:

$$\left(\frac{3}{2} - x_0\right)^2 + (0 - y_0)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{4} - 3x_0 + x_0^2 + 1 + y_0^2 = r^2$$

Sustituir valor del punto $F = (3/2, 1)$:

$$\left(\frac{3}{2} - x_0\right)^2 + (1 - y_0)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{4} - 3x_0 + x_0^2 + 1 - 2y_0 + y_0^2 = r^2$$

Despejando a conveniencia las ecuaciones y enumerándolas se tiene:

$$\begin{cases} r^2 - x_0^2 = 1 - 2y_0 + y_0^2 & (1) \\ r^2 - y_0^2 = \dfrac{9}{4} - 3x_0 + x_0^2 & (2) \\ \dfrac{9}{4} - 3x_0 + x_0^2 + 1 - 2y_0 + y_0^2 = r^2 & (3) \end{cases}$$

Se tiene tres ecuaciones con tres incógnitas (x_0, y_0, r). Se sustituye (1) y (2) en (3):

$$r^2 - y_0^2 + r^2 - x_0^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = x_0^2 + y_0^2 \qquad (4)$$

Reorganizando (1) y sustituyendo (4):

$$r^2 = 1 - 2y_0 + x_0^2 + y_0^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 1 - 2y_0 + r^2 \quad \Rightarrow \quad 2y_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{1}{2}$$

Reorganizando (2) y sustituyendo (4):

$$r^2 = \frac{9}{4} - 3x_0 + x_0^2 + y_0^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{9}{4} - 3x_0 + r^2 \quad \Rightarrow \quad 3x_0 = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{3}{4}$$

Sustituyendo los valores encontrados en (4):

$$r^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{13}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

Finalmente, la ecuación requerida es:

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{16}$$

d) Para verificar que cualquier punto pertenece a una función, basta con sustituir sus coordenadas en x y y correspondientemente, luego si la ecuación cumple la igualdad, pertenece el punto, si no (cuando se llega a una contradicción) entonces no pertenece:

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{16} = 0$$

Ahora se verifica si al sustituir las coordenadas de $G = \left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right)$ se cumple la igualdad:

$$\left(\frac{12}{13} - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{18}{13} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{16} = \left(\frac{9}{52}\right)^2 + \left(\frac{23}{26}\right)^2 - \frac{13}{16} = \frac{81}{2704} + \frac{529}{676} - \frac{13}{16}$$
$$= \frac{13}{16} - \frac{13}{16} = 0$$

Como se cumplió la igualdad a cero al sustituir las coordenadas del punto G, entonces éste pertenece a la circunferencia. • Extra: Bosquejo

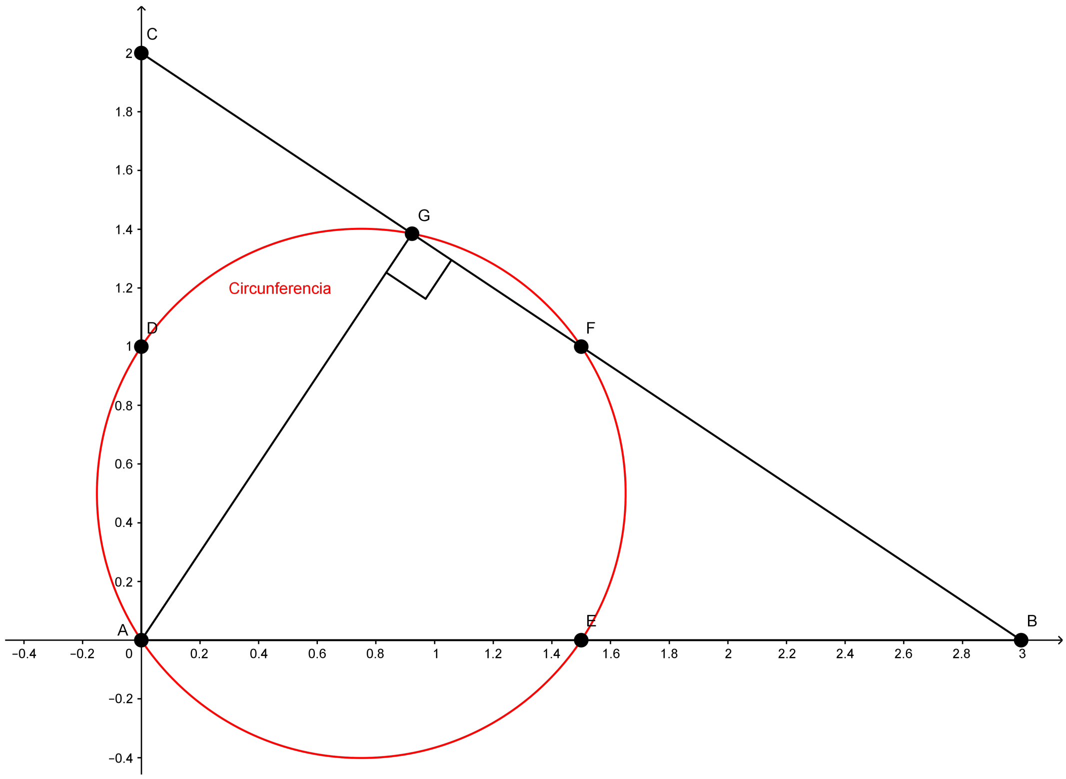

Figura 2: Triángulo y Circunferencia