Ejercicio 1 de Plano Carteciano

Isaac Vera

25 de septiembre de 2017

Primer Parcial Septiembre-Diciembre 2000 (Ejercicio 3, 8/30 puntos)

Dada la recta $\ell : 4x - 3y + 18 = 0$ y el punto $A = (0, 5)$

a) Hallar la ecuación de la recta ℓ_1 paralela a ℓ que pasa por A.
b) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por A y es tangente a las dos rectas ℓ_1 y ℓ.

Solución:

a) Se reescribe ℓ de la forma:

$$\ell : 4x - 3y + 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ell : y = \frac{4}{3}x + 6$$

Escrito de esa forma, se puede notar que la pendiente m de ℓ es 4/3 (recuerde que la pendiente de una recta es el numero que multiplica a x cuando y ha sido despejada). Por otro lado, el problema menciona que ℓ_1 y ℓ son rectas paralelas, dicho de otra forma, $\ell_1 \parallel \ell$, por lo tanto, las pendientes de estas rectas son iguales, es decir $m_1 = m = 4/3$. Asimismo, la recta pasa por el punto $A = (0, 5)$, y se sabe que la ecuación de la recta que pasa por un punto cualquiera $P = (x_0, y_0)$:

$$\ell_1 : (y - y_0) = m_1(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad \ell_1 : (y - 5) = \frac{4}{3}(x - 0) \quad \Rightarrow$$

$$\ell_1 : (y - 5) = \frac{4}{3}(x) \quad \Rightarrow \quad \ell_1 : y = \frac{4}{3}x + 5$$

b) Se realiza un bosquejo de lo que se tiene (en negro lo que ya se tiene), en otros colores lo que se necesita para determinar la ecuación de la circunferencia:

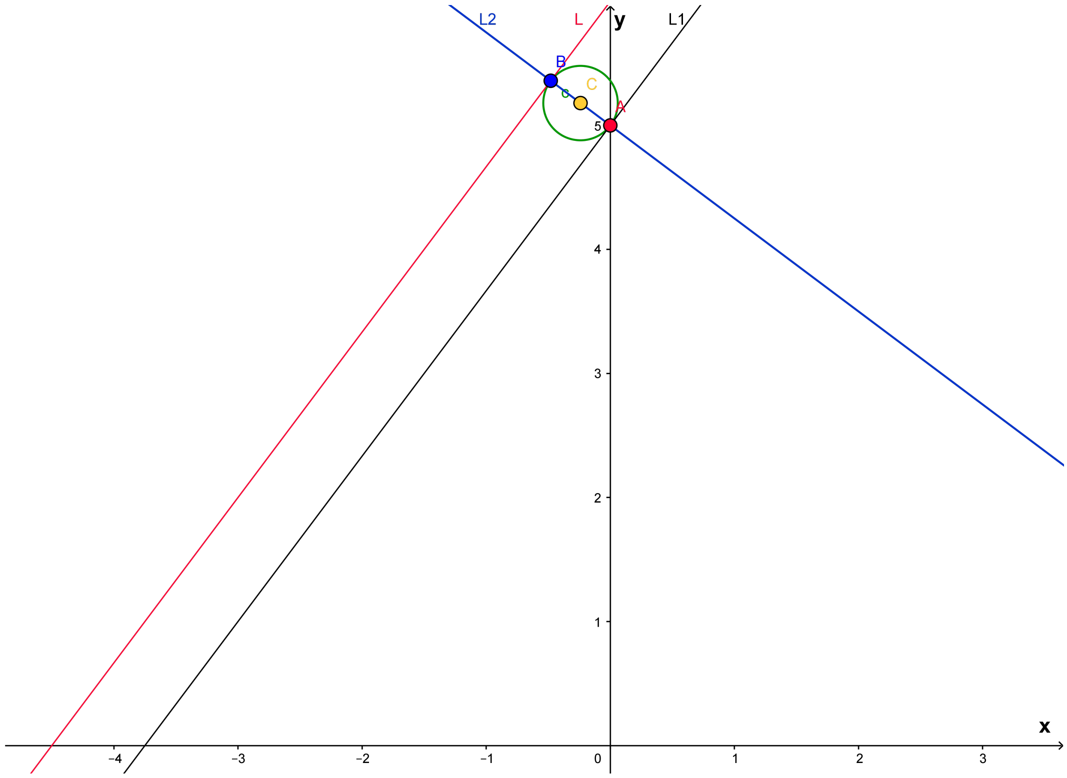

Figura 1: Gráfica de lo calculado y lo que falta

Se requiere hallar ℓ_2 para determinar el centro de la circunferencia. Como $\ell_2 \perp \ell_1$ se sabe que sus pendientes cumplen la siguiente ecuación:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Por lo tanto:

$$m_2 = -\frac{3}{4}$$

Asimismo, también se sabe que ℓ_2 pasa por el punto $A = (0, 5)$, entonces de acuerdo a la ecuación de la recta que pasa por un punto $P = (x_0, y_0)$ con su pendiente m_2:

$$\ell_2 : (y - y_0) = m_2(x - x_0)$$

Sustituyendo los valores conocidos de la pendiente y el punto:

$$\ell_2 : (y - 5) = \left(-\frac{3}{4}\right)(x - 0) \quad \Rightarrow \quad \ell_2 : y = -\frac{3}{4}x + 5$$

Ahora se determinar el punto desconocido B, que resulta de interceptar las rectas $\ell \cap \ell_2$

$$\begin{cases} \ell : y = \dfrac{4}{3}x + 6 \\ \\ \ell_2 : y = -\dfrac{3}{4}x + 5 \end{cases}$$

Se restan las ecuaciones de las rectas para obtener el valor de x:

$$\ell - \ell_2 : y - y = \frac{4}{3}x + 6 - \left(-\frac{3}{4}x + 5\right) \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{4}{3}x + 6 + \frac{3}{4} - 5 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{16x + 9x}{12} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{25x}{12} = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{12}{25}$$

El valor encontrado de $x = -\dfrac{12}{25}$ corresponde a la componente del eje ordenado del punto B. Para encontrar la componente del eje de las abscisas basta con sustituir el valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones de las rectas y despejar y:

$$y = \frac{4}{3}\left(-\frac{12}{25}\right) + 6 = -\frac{48}{75} + 6 = \frac{-48 + 450}{75} = \frac{402}{75} = \frac{134}{25}$$

Por lo tanto el punto requerido es: $B = (12/25, 134/25)$ Ahora se puede hallar la circunferencia M, que es el punto medio entre A y B, el cual está definido por la ecuación:

$$M = \left(\frac{x_0 + x_1}{2} \ , \ \frac{y_0 + y_1}{2}\right)$$

Por lo tanto:

$$M = \left(\frac{-\dfrac{12}{25} + 0}{2} \ , \ \frac{5 + \dfrac{134}{25}}{2}\right) = \left(-\frac{6}{25} \ , \ \frac{259}{50}\right)$$

Ahora es necesario determinar el radio radio de la circunferencia, para ello, simplemente se halla el módulo entre A y C. La ecuación de el módulo o distancia entre dos puntos está dado por:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Por lo tanto:

$$r = \sqrt{\left(0 - \left(-\frac{6}{25}\right)\right)^2 + \left(5 - \frac{259}{50}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{6}{25}\right)^2 + \left(\frac{-9}{50}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{625} + \frac{81}{2500}}$$

$$= \sqrt{\frac{36 \cdot 4 + 81}{2500}} = \sqrt{\frac{144 + 81}{2500}} = \sqrt{\frac{9}{100}}$$

Finalmente, de acuerdo con la ecuación de una circunferencia cualquiera C centrada en (x_0, y_0) y con radio r:

$$C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

De modo que, al sustituir valores (centrada en M y de radio r, la ecuación de la circunferencia pedida es:

$$C : \left(x + \frac{6}{25}\right)^2 + \left(y - \frac{259}{50}\right)^2 = \frac{9}{100}$$