Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas III (MA1116)
1^er Examen Parcial (30 %)
Abr-Jul 2018

Turno 5-6
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (11 ptos.) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}(1-\alpha)x+2y+z &= 4\\ x+y-2z &= -4\\ x+4y-(\alpha+1)z &= -2\alpha\end{aligned}$$

Halle los valores de α para que el sistema sea:

a. Consistente con infinitas soluciones. Halle estas soluciones.

b. Inconsistente.

c. Consistente con solución única.

Solución: Escribimos la matriz aumenta del sistema y le aplicamos operaciones elementales de fila para obtener la siguiente matriz equivalente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -2 & -4\\ 1 & 4 & -(\alpha+1) & -2\alpha\end{array}\right)\sim\cdots\sim$$

$$\sim\cdots\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \dfrac{1}{3}(\alpha-7) & \dfrac{2}{3}(\alpha-8)\\ 0 & 1 & \dfrac{1}{3}(1-\alpha) & \dfrac{2}{3}(2-\alpha)\\ 0 & 0 & (\alpha-2)(\alpha-4) & 2(\alpha-2)(\alpha-5)\end{array}\right)$$

El sistema tiene infinitas soluciones si $(\alpha-2)(\alpha-4)=0$ y $(\alpha-2)(\alpha-5)=0$; es decir, si $\alpha=2$. En tal caso, la matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -4\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

cuyas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+\frac{5}{3}\lambda \\ \frac{1}{3}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

El sistema es inconsistente si $(\alpha-2)(\alpha-4)=0$ y $(\alpha-2)(\alpha-5)\neq 0$; es decir, si $\alpha = 4$.

El sistema tiene solución única si $(\alpha-2)(\alpha-4)\neq 0$; es decir, si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2,4\}$.

Pregunta 2. (7 ptos.) Sean las matrices

$$C = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{pmatrix}$$

a. Calcule los determinantes de C y D.

b. Para $x = y = z = 1$, calcule el determinante de la matriz producto CD.

c. Determine para que valores de x, y, z ninguna de las matrices C y D tiene inversa.

Solución:

$$\left|C\right| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10x - 8y + 2z$$

$$\left|D\right| = \begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{vmatrix} = -x - 4y + 3z$$

Como $\left|CD\right| = \left|C\right|\left|D\right|$ entonces $\left|CD\right| = (4)(-2) = -8$ cuando $x = y = z = 1$.

Como una matriz es invertible si, y sólo si, su determinante es igual a cero, ninguna de las matrices tendra inversa si ambos determinantes son iguales a cero. El sistema de estas dos ecuaciones es

$$\begin{aligned} 10x - 8y + 2z &= 0 \\ -x - 4y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

cuyas infinitas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pregunta 3. (6 ptos.) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Halle el determinante de las matrices

$$A\big(2(B^2)\big) \quad \text{y} \quad A\big(2(B^2)\big)(3A)^{-1}$$

b. Halle las matrices A^{-1} y $\big((BA)^{-1}B\big)^{-1}$

Solución: Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

y

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

entonces

$$\big|A\big(2(B^2)\big)\big| = 2^3|A|\,|B^2| = 2^3|A|\,|B|^2 = 2^3(-1)(5)^2 = -200$$

$$\big|A\big(2(B^2)\big)(3A)^{-1}\big| = \big|A\big(2(B^2)\big)\big|\,\frac{1}{|3A|} = -200\frac{1}{3^3|A|} = \frac{200}{27}$$

Mediante el método de Jordan o a través del cálculo de la matriz adjunta, la inversa de A viene dada por

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$\left((BA)^{-1}B\right)^{-1} = B^{-1}\left((BA)^{-1}\right)^{-1} = B^{-1}BA = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 4. (6 ptos.) Para cada una de las siguientes afirmaciones determine si son verdaderas o falsas:

a. Si x_1 y x_2 son soluciones del sistema $Ax = B$ con $B \neq 0$, entonces $x_1 - x_2$ también es solución del sistema $Ax = B$.

b. El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 5 & a \\ 9 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ no depende de los valores de $a, b \in \mathbb{R}$.

Solución:

a. La afirmación es falsa, ya que si x_1 y x_2 son soluciones del sistema $Ax = B$ entonces

$$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = B - B = 0 \neq B$$

por lo que $x_1 - x_2$ no es solución del sistema $Ax = B$ con $B \neq 0$.

b. La afirmación es verdadera ya que al hacer la expansión por cofactores a lo largo de la última fila obtenemos que el determinante de la matriz vale -84 sin importar la asignación de valores para a y b.