Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas III (MA1116)
1er Examen Parcial (30 %)
Abr-Jul 2018

Turno 1-2
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (11 ptos.) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x+y-z &= 1 \\ 2x+y+\beta z &= 3 \\ x+\beta y+3z &= 2 \end{aligned}$$

Halle los valores de β para que el sistema sea:

a. Consistente con infinitas soluciones. Halle estas soluciones.

b. Inconsistente.

c. Consistente con solución única.

Solución: Escribimos la matriz aumenta del sistema y le aplicamos operaciones elementales de fila para obtener la siguiente matriz equivalente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & \beta & 3 \\ 1 & \beta & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta+2 & 1 \\ 0 & 0 & (2-\beta)(3+\beta) & 2-\beta \end{array}\right)$$

El sistema tiene infinitas soluciones si $(2-\beta)(3+\beta)=0$ y $2-\beta=0$; es decir, si $\beta=2$. En tal caso, la matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

cuyas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\lambda \\ 1-4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

El sistema es inconsistente si $(2-\beta)(3+\beta)=0$ y $2-\beta\neq 0$; es decir, si $\beta=-3$.

El sistema tiene solución única si $(2-\beta)(3+\beta)\neq 0$; es decir, si $\beta\in\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$.

Pregunta 2. (6 ptos.) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Halle los siguientes determinantes:

a. $\left|A+B\right|$ y $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|$

b. $\left|(A+B)^{-1}A\right|$ y $\left|A^{-1}(A+B)\right|$

c. $\left|2ABA^{-1}\right|$ y $\left|A^{3}B^{-1}\right|$

Solución:

$$\left|A+B\right|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}=24$$

$$\left|\tfrac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left|(A+B)^{-1}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\frac{1}{\left|A+B\right|}=\frac{1}{192}$$

$$\left|(A+B)^{-1}A\right|=\left|(A+B)^{-1}\right|\left|A\right|=\frac{1}{\left|A+B\right|}\left|A\right|=\frac{1}{6}$$

$$\left|A^{-1}(A+B)\right|=\left|A^{-1}\right|\left|A+B\right|=\frac{1}{\left|A\right|}\left|A+B\right|=6$$

$$\left|2ABA^{-1}\right|=2^{3}\left|ABA^{-1}\right|=2^{3}\left|A\right|\left|B\right|\left|A^{-1}\right|=2^{3}\left|B\right|=-32$$

$$\left|A^{3}B^{-1}\right|=\left|AAAB^{-1}\right|=\left|A\right|^{3}\frac{1}{\left|B\right|}=-16$$

Pregunta 3. (9 ptos.) Sea la matriz

$$C = \begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}$$

a. ¿Para cuáles valores del parámetro t es la matriz C singular?

b. Halle $\left|C^{-1}\right|$ para $t = 2$.

c. Halle C^{-1}.

Solución: Como $\left|C\right| = (t-6)(t-4)$, la matriz C es singular para $t \in \{4, 6\}$ ya que esos son los únicos valores para los cuales $\left|C\right| = 0$.

Si $t = 2$ tenemos que $\left|C\right| = 8$ y entonces $\left|C^{-1}\right| = \frac{1}{8}$ para $t = 2$.

Para que C sea invertible es necesario que $t \notin \{4, 6\}$. Luego, o bien aplicando el método de Jordan o bien a través del cálculo de la matriz adjunta, la inversa viene dada por

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{t-6} & \dfrac{-4}{t-6} & \dfrac{-11}{(t-4)(t-6)} \\ \dfrac{-1}{t-6} & \dfrac{t-2}{t-6} & \dfrac{2t-1}{(t-4)(t-6)} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{t-4} \end{pmatrix}$$

siempre que $t \in \mathbb{R} \setminus \{4, 6\}$.

Pregunta 4. (4 ptos.) Para cada una de las siguientes afirmaciones determine si son verdaderas o falsas:

a. Las soluciones de la ecuación $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} = 3$ son $x = -1$ y $x = 5$.

b. $\det(-A) = -\det(A)$

Solución:

a. La afirmación es verdadera ya que $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 4x - 2$ y las únicas soluciones de la ecuación $x^2 - 4x - 2 = 3$ son $x = -1$ y $x = 5$.

b. La afirmación es falsa ya que si A es la matriz identidad 2×2 entonces $\det(-A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$ pero $-\det(A) = -1$.