Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
3$^{\text{er}}$ Examen Parcial (35 %)
Sep-Dic 2017

Turno 5-6
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (5 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x^2)}{\operatorname{sen}^2(x)}$

Solución: Como $\lim\limits_{x\to 0} \arctan(x^2) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}^2(x)$, la Regla de L'Hôpital establece

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^2)}{\operatorname{sen}^2(x)} \overset{\substack{\text{L'H}\\ \downarrow}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2x}{1+\left(x^2\right)^2}}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)\left(1+x^4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \; \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)\left(1+x^4\right)} = 1$$

ya que el último límite existe.

Pregunta 2. (5 ptos.) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(1/x\right) & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Supongamos que h es tal que $h'(x) = \operatorname{sen}^2\big(\operatorname{sen}(x+1)\big)$ y $h(0) = 3$. Calcule $\big(f \circ h\big)'(0)$.

Solución: Usando la Regla de la Cadena,

$$\big(f \circ h\big)'(0) = f'\big(h(0)\big)\, h'(0) = \Big(6\operatorname{sen}\left(1/3\right) - \cos\left(1/3\right)\Big) \operatorname{sen}^2\big(\operatorname{sen}(1)\big)$$

ya que $f'\big(h(0)\big) = f'(3)$, $f'(x) = 2x\operatorname{sen}\left(1/x\right) + x^2\cos\left(1/x\right)\left(-1/x^2\right)$ si $x \neq 0$ y $h'(0) = \operatorname{sen}^2\big(\operatorname{sen}(0+1)\big)$.

Pregunta 3. (5 ptos.) Encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto perteneciente al primer cuadrante donde la curva dada por $x^3 + y^3 = 3xy$ corta al gráfico de $y = x$.

Solución: La intersección de la curva $x^3 + y^3 = 3xy$ con la recta $y = x$ determina

$$\left.\begin{aligned} x^3 + y^3 = 3xy \\ y = x \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^2(2x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ o } \ x = 3/2$$

Como el punto pertenece al primer cuadrante, es $(x, y) = \left(3/2, 3/2\right)$. Derivando implícitamente la ecuación de la curva obtenemos

$$3x^2 + 3y^2y' = 3\big(y + xy'\big) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

Evaluando en el punto $(x, y) = \left(3/2, 3/2\right)$ se tiene que la pendiente de la recta tangente es

$$y'\Big|_{(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)} = \frac{9/4 - 3/2}{3/2 - 9/4} = -1$$

y, por lo tanto, la ecuación de la recta deseada es $y = -x + 3$.

Pregunta 4. (10 ptos.) Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$, halle:

a. Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas);

b. Puntos críticos;

c. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento;

d. Intervalos de concavidad;

e. Puntos de inflexión.

Solución: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \infty \\
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \infty \\
\lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\left(1 - 1/x\right)^2} = 1 \\
\lim_{x\to +\infty} f(x) &= \lim_{x\to \infty} \frac{1}{\left(1 - 1/x\right)^2} = 1
\end{aligned}$$

Posee asíntota vertical en $x = 1$.
Posee asíntota horizontal $y = 1$ tanto para $x \to -\infty$ como para $x \to \infty$.
No posee asíntota oblicua (ya que posee horizontal hacia ambos lados).

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x-1)^3}$$

El único punto crítico es $x = 0$, que es estacionario.

$$\begin{array}{lcl} f'(x) > 0 & \iff & x \in (0,1) \\ f'(x) < 0 & \iff & x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \end{array}$$

f es creciente en $(0,1)$.
f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(1, \infty)$.

$$f''(x) = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

$$\begin{array}{lcl} f''(x) > 0 & \iff & x \in \left(-1/2, 1\right) \cup \left(1, \infty\right) \\ f''(x) < 0 & \iff & x \in \left(-\infty, -1/2\right) \end{array}$$

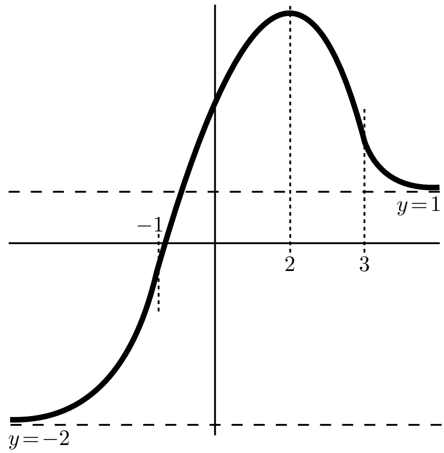
f es cóncava hacia arriba en $\left(-1/2, 1\right)$ y en $\left(1, \infty\right)$.
f es cóncava hacia abajo en$\left(-\infty, -1/2\right)$.
f posee punto de inflexión en $x = -1/2$.

Pregunta 5. (5 ptos.) Haga un bosquejo de la gráfica de h sabiendo que:

- $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$ y h es continua
- $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} h(x) = -2$
- $h'(x) > 0$ si $x < 2$ y $h'(x) < 0$ si $x > 2$
- $h''(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ y $h''(x) < 0$ si $x \in (-1, 3)$

Además, demuestre que la función h está acotada; es decir, que existen constantes m y M tales que $m \leq h(x) \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Halle m y M.

Solución:



Como h es continua en todo $\mathbb{R}$, creciente en $(-\infty, 2)$ y decreciente en $(2, \infty)$, ella alcanza su valor máximo en $x = 2$. Además, como $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 1$ entonces $1 < h(x) \leq h(2)$ para $x \geq 2$ y como $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -2$ entonces $-2 < h(x) \leq h(2)$ para $x \leq 2$. Así, para cualquier par de constantes m y M tales que $m \leq -2$ y $h(2) \leq M$ se tiene que $m \leq h(x) \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Pregunta 6. (5 ptos.) Halle las dimensiones de un envase cilíndrico con ambas tapas tal que el área de su superficie vale A y su volumen es máximo.

Solución: Denotando por r el radio de las tapas y L la longitud del cilindro, el área de su superficie viene dada por $\pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r L$ y debe ser igual a A. Necesariamente, $r > 0$ y así $L = \dfrac{A - 2\pi r^2}{2\pi r}$. Como $L > 0$ entonces $r \in \left(0, \sqrt{A/2\pi}\right)$. El volumen del cilindro viene dado por el producto del área de la tapa por la longitud del cilindro, que es

$$V = V(r) = \left(\pi r^2\right) L = \left(\pi r^2\right) \frac{A - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{1}{2} r \left(A - 2\pi r^2\right)$$

con $r \in \left(0, \sqrt{A/2\pi}\right)$. Luego, $V'(r) = \frac{1}{2}\left(A - 6\pi r^2\right)$ y su único punto crítico, que es estacionario, ocurre en $r = \sqrt{A/6\pi}$. Como $V''(r) = -6\pi r < 0$, pues $r > 0$, $V\left(\sqrt{A/6\pi}\right)$ es el valor máximo para la función. Por lo tanto, las dimensiones deseadas son $r = \sqrt{A/6\pi}$ y $L = \frac{1}{3}\sqrt{6A/\pi}$.