Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
3^{er} Examen Parcial (35 %)
Sep-Dic 2017

Turno 3-4
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (5 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

Solución: Como $\lim\limits_{x\to 0}\big(x-\operatorname{sen}(x)\big)=0=\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{sen}(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0}\big(1-\cos(x)\big)=0=\lim\limits_{x\to 0}\big(\operatorname{sen}(x)+x\cos(x)\big)$, la Regla de L'Hôpital establece

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x\operatorname{sen}(x)}\overset{\substack{\text{L'H}\\ \downarrow}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)+x\cos(x)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'H}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\operatorname{sen}(x)}=\frac{0}{2}=0$$

ya que el último límite existe.

Pregunta 2. (5 ptos.) Halle la derivada de

$$f(x)=\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}\big(x^2\big)\operatorname{sen}\Big(\operatorname{sen}\big(x^2\big)\Big)$$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x)=\;&2\operatorname{sen}(x)\cos(x)\quad\operatorname{sen}\big(x^2\big)\operatorname{sen}\Big(\operatorname{sen}\big(x^2\big)\Big)\\ &+\operatorname{sen}^2(x)\quad\cos\big(x^2\big)\,2x\quad\operatorname{sen}\Big(\operatorname{sen}\big(x^2\big)\Big)\\ &+\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}\big(x^2\big)\quad\cos\Big(\operatorname{sen}\big(x^2\big)\Big)\cos\big(x^2\big)\,2x \end{aligned}$$

Pregunta 3. (5 ptos.) Encuentre las coordenadas del punto perteneciente al tercer cuadrante sobre la curva dada por la ecuación $x^2 - xy + y^2 = 27$ donde la recta tangente es paralela a la recta $2y - 3 = 0$.

Solución: Derivando implícitamente,

$$2x - \big(y + xy'\big) + 2yy' = 0$$

de donde

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

Para que la recta tangente sea paralela a $2y - 3 = 0$ (cuya pendiente vale cero) es necesario que $y' = 0$; es decir, $2x - y = 0$. Luego,

$$\left.\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 = 27 \\ 2x - y = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -3 \ \text{ o } \ x = 3$$

Como el punto pertenece al tercer cuadrante, tenemos que $x = -3$ y, en tal caso, $y = -6$; son las coordenadas del punto deseado.

Pregunta 4. (10 ptos.) Dada la función $f(x) = \dfrac{x+4}{2x-3}$, halle:

a. Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas);

b. Puntos críticos;

c. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento;

d. Intervalos de concavidad;

e. Puntos de inflexión.

Solución: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3/2\}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{3}{2}^-} f(x) &= \lim_{x\to\frac{3}{2}^-} \frac{x+4}{2\big(x - 3/2\big)} = -\infty \\
\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} f(x) &= \lim_{x\to\frac{3}{2}^+} \frac{x+4}{2\big(x - 3/2\big)} = \infty \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + 4/x}{2 - 3/x} = 1/2 \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1 + 4/x}{2 - 3/x} = 1/2
\end{aligned}$$

Posee asíntota vertical en $x = 3/2$.
Posee asíntota horizontal $y = 1/2$ tanto para $x \to -\infty$ como para $x \to \infty$.
No posee asíntota oblicua (ya que posee horizontal hacia ambos lados).

$$f'(x) = \frac{-11}{(2x-3)^2}$$

El único punto crítico es $x =$, que es estacionario.

$$\begin{array}{lcl} f'(x) > 0 & \iff & x \in \emptyset \\ f'(x) < 0 & \iff & x \in \mathbb{R} \setminus \{3/2\} \end{array}$$

f nunca es creciente.
f es decreciente en $\big(-\infty, 3/2\big)$ y en $\big(3/2, \infty\big)$

$$f''(x) = \frac{44}{(2x-3)^3}$$

$$\begin{array}{lcl} f''(x) > 0 & \iff & x \in \big(3/2, \infty\big) \\ f''(x) < 0 & \iff & x \in \big(-\infty, 3/2\big) \end{array}$$

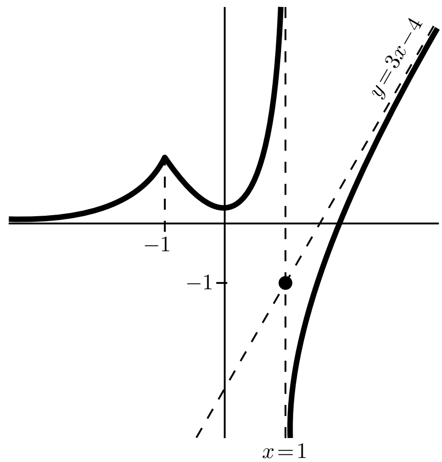
f es cóncava hacia arriba en $\big(3/2, \infty\big)$.
f es cóncava hacia abajo en$\big(-\infty, 3/2\big)$.
No posee puntos de inflexión.

Pregunta 5. (5 ptos.) Haga un bosquejo de la gráfica de g sabiendo que:

- $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$ y g es continua en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ y la gráfica de g tiende asintóticamente a la recta de ecuación $y = 3x - 4$ cuando $x \to \infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -\infty \qquad g(1) = -1$
- $g'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ y $g'(x) < 0$ si $x \in (-1, 0)$
- $g''(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ y $g''(x) < 0$ si $x > 1$

Además, determine si g es diferenciable en $x = -1$.

Solución:



Como $g''(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$, tenemos que $g'(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, 1)$. Pero como $g'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -1)$ y $g'(x) < 0$ para $x \in (-1, 1)$ es imposible que g' sea continua en $x = -1$. Por lo tanto, g no es diferenciable en $x = -1$.

Pregunta 6. (5 ptos.) Exprese el número 5 como suma de tres números tales que la suma de dos de ellos sea igual a tres veces el tercero y tales que su producto sea máximo.

Solución: Dados tres números a, b y c tales que $a+b = 3c$ y $a+b+c = 5$, queremos que su producto, abc, sea máximo. Resolviendo las dos ecuaciones anteriores obtenemos que, necesariamente, $c = 5/4$. Luego, el producto de los tres números se puede reescribir como

$$abc = ab\frac{5}{4} = a\left(\frac{15}{4} - a\right)\frac{5}{4}.$$

ya que $a+b = 3c = 15/4$. Consideremos $f(a) = a\left(\frac{15}{4} - a\right)\frac{5}{4}$ con $a \in \mathbb{R}$. Luego,

$$f'(a) = \frac{5}{2}\left(\frac{15}{8} - a\right)$$

por lo que el único punto crítico es estacionario y ocurre en $a = 15/8$. Como $f''(a) = -5/2 < 0$, $f\left(15/8\right)$ es el valor máximo de la función f. Así,

$$5 = \frac{15}{8} + \frac{15}{8} + \frac{5}{4}$$

es la expresión deseada.