Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
1^{er} Examen Parcial (30 %)
Sep-Dic 2017

Turno 1-2
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (8 ptos.) Encuentre los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left|x^2-3\right| < \left|2x-5\right|$$

Solución:

$$\left|x^2-3\right| = \begin{cases} x^2-3 & \text{, si } |x| \geq \sqrt{3} \\ 3-x^2 & \text{, si } |x| < \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{y} \quad |2x-5| = \begin{cases} 2x-5 & \text{, si } x \geq 5/2 \\ 5-2x & \text{, si } x < 5/2 \end{cases}$$

Si $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right]$

$$\begin{aligned} \left|x^2-3\right| < \left|2x-5\right| \quad &\Rightarrow \quad x^2-3 < 5-2x \\ &\Rightarrow \quad x^2+2x-8<0 \\ &\Rightarrow \quad (x-2)(x+4)<0 \\ &\Rightarrow \quad x \in \left(-\infty,-\sqrt{3}\right] \cap (-4,2) = \left(-4,-\sqrt{3}\right] \end{aligned}$$

Si $x \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

$$\begin{aligned} \left|x^2-3\right| < \left|2x-5\right| \quad &\Rightarrow \quad 3-x^2 < 5-2x \\ &\Rightarrow \quad 0 < 2-2x+x^2 \\ &\Rightarrow \quad 0 < (x-1)^2+1 \\ &\Rightarrow \quad x \in \left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right) \cap \mathbb{R} = \left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

Si $x \in \left[\sqrt{3}, 5/2\right)$

$$\begin{aligned} \left|x^2-3\right| < \left|2x-5\right| \quad &\Rightarrow \quad x^2-3 < 5-2x \\ &\Rightarrow \quad (x-2)(x+4)<0 \\ &\Rightarrow \quad x \in \left[\sqrt{3},5/2\right) \cap (-4,2) = \left[\sqrt{3},2\right) \end{aligned}$$

Si $x \in \left(5/2, \infty\right)$

$$\begin{aligned} \left|x^2-3\right| < \left|2x-5\right| \quad &\Rightarrow \quad x^2-3 < 2x-5 \\ &\Rightarrow \quad (x-1)^2+1<0 \\ &\Rightarrow \quad x \in \left(5/2,\infty\right) \cap \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

Así, la solución general es

$$x \in \Big(-4, -\sqrt{3} \Big] \cup \Big(-\sqrt{3}, \sqrt{3} \Big) \cup \Big[\sqrt{3}, 2 \Big) = (-4, 2).$$

Pregunta 2. (7 ptos.) Halle el dominio de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}(2 - x)}$$

Solución: Notemos que x pertence al dominio de f si, y sólo si, $4 - x^2 \geq 0$, $|2 - x| \leq 1$ y $\operatorname{arcsen}(2 - x) \neq \pi/2$. Como

$$4 - x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [-2, 2]$$
$$|2 - x| \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq 2 - x \leq 1 \Longleftrightarrow 3 \geq x \geq 1$$
$$\operatorname{arcsen}(2 - x) \neq \pi/2 \Longleftrightarrow 2 - x \neq 1 \Longleftrightarrow x \neq 1$$

el dominio de f es el conjunto $[-2, 2] \cap [1, 3] \setminus \{1\} = (1, 2]$.

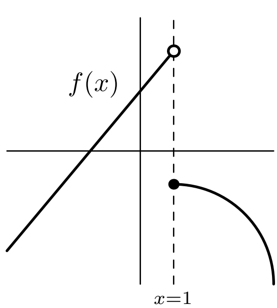
Pregunta 3. (7 ptos.) Dadas las funciones

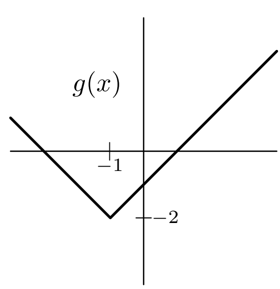
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{, si } x \geq 1 \\ x + 2 & \text{, si } x < 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = |x + 1| - 2$$

a. Haga un bosquejo de las gráficas de las funciones;

b. Determine $f \circ g$.

Solución:





$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -\big(g(x)\big)^2 & \text{, si } g(x) \geq 1 \\ g(x) + 2 & \text{, si } g(x) < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\big(|x + 1| - 2\big)^2 & \text{, si } x \in (-\infty, -4] \cup [2, \infty) \\ |x + 1| & \text{, si } x \in (-4, 2) \end{cases}$$

Ya que

$$g(x) < 1 \Leftrightarrow |x+1| - 2 < 1 \Leftrightarrow |x+1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x+1 < 3 \Leftrightarrow -4 < x < 2$$

y

$$g(x) \geq 1 \Leftrightarrow |x+1| \geq 3 \Leftrightarrow x+1 \leq -3 \text{ o } x+1 \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -4 \text{ o } x \geq 2.$$

Pregunta 4. (8 ptos.) Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,3)$, $B(-1,1)$ y cuyo centro está en la recta $6x + 3y - 8 = 0$.

Solución: La ecuación de la circunferencia centrada en el punto (c_x, c_y) de radio r es

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2.$$

Como los puntos $A(2,3)$ y $B(-1,1)$ pertenecen a la circunferencia entonces

$$(2 - c_x)^2 + (3 - c_y)^2 = r^2 = (-1 - c_x)^2 + (1 - c_y)^2$$

de donde se obtiene la relación

$$4c_y + 6c_x - 11 = 0.$$

Como el centro de la circunferencia está en la recta $6x + 3y - 8 = 0$ entonces $6c_x + 3c_y - 8 = 0$. Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos $c_y = 3$ y $c_x = -1/6$. Luego,

$$r^2 = (-1 + 1/6)^2 + (1 - 3)^2 = 169/36.$$

Así, la ecuación de la circunferencia deseada es

$$(x + 1/6)^2 + (y - 3)^2 = 169/36.$$