



I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

III. Sistemas de N-GDL

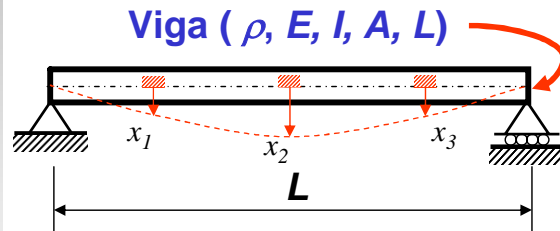
Descripción
Ec. de movimiento
Cálculo de M y K
Resp. libre
Resp. forzada
Reducción modal

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

Cálculo de M y K (viga simplemente apoyada) (i)

- Viga uniforme (densidad, sección, material)
- Hipótesis:**
 - Viga modelada como sistema de 3 GDL
 - Masas concentradas y método de los coef. de influencia



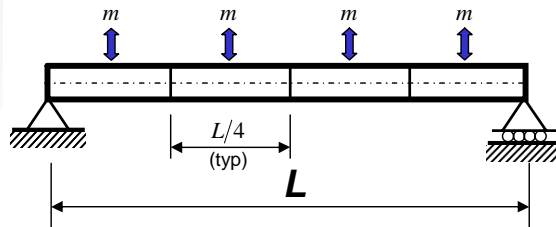
Sección de la viga

$$A = bh$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$M = \rho AL$$

1: Se divide la viga en 4 segmentos de igual longitud y masa m



$$m = \frac{\rho AL}{4}$$

Euro Casanova, 2006



I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

III. Sistemas de N-GDL

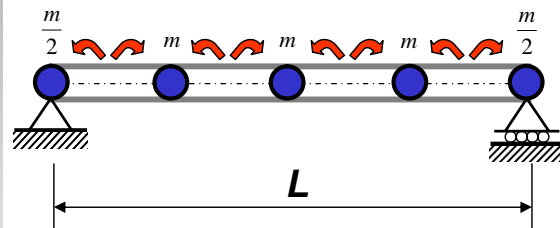
Descripción
Ec. de movimiento
Cálculo de M y K
Resp. libre
Resp. forzada
Reducción modal

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

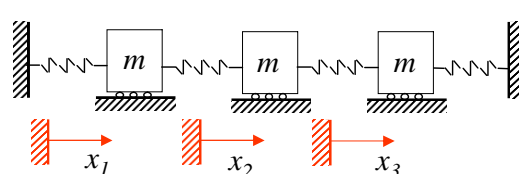
Cálculo de M y K (viga simplemente apoyada) (ii)

2: La mitad de la masa de cada segmento se coloca en los extremos del mismo (partículas)



$$m = \frac{\rho AL}{4}$$

3: Las partículas de los extremos de las vigas se desprecian debido a que esos puntos están fijos a tierra (no acumulan energía cinética). Los segmentos son reemplazados por resortes.



$$\mathbf{x}_{(t)} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M} = \frac{\rho AL}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4: Se aplica el método de los coeficientes de influencia para determinar los valores de la matriz de rigidez.

Euro Casanova, 2006



I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

III. Sistemas de N-GDL

Descripción
Ec. de movimiento
Cálculo de M y K
Resp. libre
Resp. forzada
Reducción modal

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

Cálculo de M y K (viga simplemente apoyada) (iii)

Método de coeficientes de influencia

Ec. de movimiento (dinámica): $M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t)$

Ec. de movimiento (estática): $Kx_s = f$

Solución:

$x_s = K^{-1}f = Gf$

Matriz de flexibilidad

$$x_s = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{1j} & g_{1N} \\ g_{i1} & g_{ij} & g_{iN} \\ g_{N1} & g_{Nj} & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_j \\ f_N \end{Bmatrix} = Gf$$

$$x_i = \sum_{j=1}^N g_{ij} f_j \quad \begin{matrix} i=1 \dots N \\ j=1 \dots N \end{matrix}$$

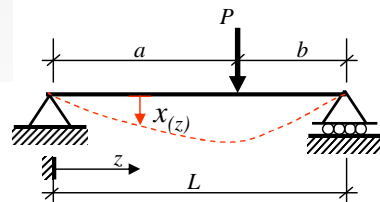
Si: $f = f^j = \langle 0 \dots 0 f_j 0 \dots 0 \rangle^T$

$$x_i = g_{ij} f_j \quad \begin{matrix} i=1 \dots N \\ j=1 \dots N \end{matrix}$$

g_{ij} se calcula como la deflexión del punto i cuando se aplica una carga en el punto j :

$$g_{ij} = \frac{x_i}{f_j} \quad \begin{matrix} i=1 \dots N \\ j=1 \dots N \end{matrix}$$

La deflexión del punto i (x_i) se mide experimentalmente, o se obtiene mediante expresiones teóricas



$$x(z) = \begin{cases} \frac{Pbz}{6EIL}(L^2 - b^2 - z^2) & 0 \leq z \leq a \\ \frac{Pa(1-z)}{6EIL}(a^2 + z^2 - 2Lz) & a \leq z \leq L \end{cases}$$



I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

III. Sistemas de N-GDL

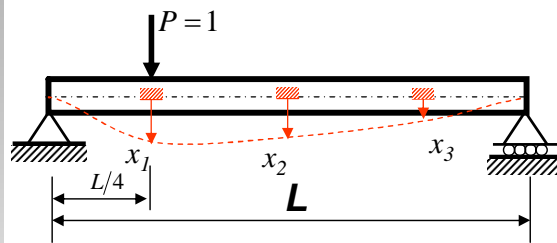
Descripción
Ec. de movimiento
Cálculo de M y K
Resp. libre
Resp. forzada
Reducción modal

IV. Medición / diagnóstico

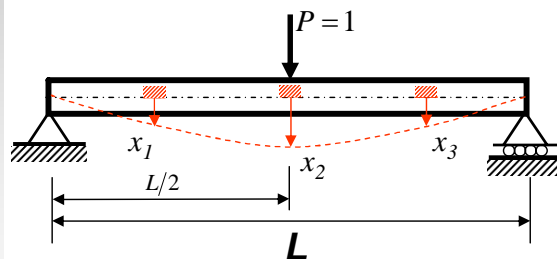
V. Bibliografía

Cálculo de M y K (viga simplemente apoyada) (iv)

Aplicación del método de coef. de influencia a la viga



$$g_{i1} = \frac{x_i}{f_1} \left\{ \begin{matrix} g_{11} = \frac{x_1}{1} = \frac{9L^3}{768EI} \\ g_{21} = \frac{x_2}{1} = \frac{11L^3}{768EI} \\ g_{31} = \frac{x_3}{1} = \frac{7L^3}{768EI} \end{matrix} \right.$$



$$g_{i2} = \frac{x_i}{f_2} \left\{ \begin{matrix} g_{22} = \frac{x_2}{1} = \frac{16L^3}{768EI} \\ g_{32} = \frac{x_3}{1} = \frac{7L^3}{768EI} \end{matrix} \right.$$

Por simetría: $g_{33} = g_{11} \quad g_{12} = g_{21} \quad g_{13} = g_{31} \quad g_{23} = g_{32}$

$$G = \frac{L^3}{768EI} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow K = G^{-1} = \frac{192EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 23 & -22 & 9 \\ -22 & 32 & -22 \\ 9 & -22 & 23 \end{bmatrix}$$